

---

# UNIWERSYTET M. CURIE – SKŁODOWSKIEJ

Tel: (+48) 81 – 537 62 41

Fax: (+48) 81 – 537 61 91

Email: [doman@kft.umcs.lublin.pl](mailto:doman@kft.umcs.lublin.pl)

Web: <http://kft.umcs.lublin.pl/doman>

Prof. dr hab. Tadeusz Domański

Zakład Teorii Fazy Skondensowanej

Instytut Fizyki UMCS w Lublinie

---

Lublin, 14 marca 2016 r.

## Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Mariusza Adamskiego pt. „Krytyczne skalowanie kwantowej wierności”

Przedłożona rozprawa doktorska podejmuje ważną problematykę kwantowych przejść fazowych, krytycznego skalowania oraz ilościowej miary podobieństwa stanów za pomocą tzw. kwantowej wierności (ang. *fidelity*). Są to zagadnienia z pogranicza mechaniki kwantowej, fizyki materii skondensowanej oraz kwantowej informatyki. Na przestrzeni ostatnich 15-20 lat zyskały one dużą popularność zarówno z punktu widzenia badań podstawowych jak też ze względu na perspektywę potencjalnego zastosowania w operacjach na bitach kwantowych (qubitach).

Obecna praca doktorska została przygotowana w Instytucie Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Wrocławskiego pod kierunkiem profesora Janusza Jędrzejewskiego. Na aktualny dorobek Doktoranta składa się artykuł opublikowany w *J. Stat. Mech.* (2013) oraz dwie inne prace, dostępne w bazie preprintów (arXiv:1311.1080, arXiv:1502.05268). Część wyników Doktorant uzyskał we współpracy z doktorem Tarasem Krokhmalskim ze Lwowa. Badania te były finansowane przez Uniwersytet Wrocławski w ramach grantów 1480/M/IFT/11 oraz 2288/M/IFT/12. W dalszej części postaram się przedstawić merytoryczną ocenę osiągnięć Doktoranta.

Pierwszy rozdział precyzuje podstawowe pojęcia. W szczególności Doktorant przedstawił ideę *kwantowego punktu krytycznego* (KPK), jako miejsca rozgraniczenia dwóch różnych stanów podstawowych. Empirycznie obecność takiego punktu przejawiać się może w temperaturach niezerowych poprzez skalowanie obserwabli z charakterystycznymi indeksami krytycznymi. W zakresie obszaru krytycznego pojawiają się silne fluktuacje kwantowe. Przykładem takiego obszaru może być faza tzw. dziwnego metalu (ang. *strange metal*) wokół optymalnego domieszkowania nadprzewodników wysokotemperaturowych, chociaż obecność domniemanego KPK jest w dalszym ciągu tematem spornym. In-

nym przykładem może być ferromagnetyzm opisany w ramach jednowymiarowego modelu Isinga w poprzecznym polu magnetycznym. Na rysunku 1.4 zilustrowano różne formy uporządkowania spinowego stanu podstawowego i jakościowo odmienne stany wzbudzone, typu domenowego oraz z odwróconym pojedynczym spinem.

W podrozdziale 1.2 Doktorant wprowadził pojęcie kwantowej wierności. Dla stanów czystych kwantowa wierność przyjmuje wyjątkowo prostą postać modułu iloczynu skalarnego, którego wartości liczbowe mieszczą się w przedziale od 0 do 1. Ujemny logarytm naturalny kwantowej wierności stanowi semi-metrykę (gdyż nie spełnia nierówności trójkąta). W dalszej części na przykładzie modelu XY z polem (w kierunku osi  $z$ ) pokazano zmianę wartości liczbowej wierności wzdłuż linii krytycznych i w pobliżu punktów multi-krytycznych. Minima kwantowej wierności faktycznie odzwierciedlają przejście pomiędzy różnymi stanami podstawowymi. Kolejną użyteczną wielkością może też być podatność wierności kwantowej, która wykazuje rozbieżność w punkcie krytycznym. Uogólnieniem pojęcia podatności wierności na przypadek wektorowej przestrzeni paramagnetycznej jest tzw. kwantowy tensor geometryczny, który niesie informacje o odległości (część rzeczywista) oraz o geometrycznej fazie Berry'ego (część urojona).

W rozdziale 2 opisano mikroskopowy model wędrownych fermionów w  $d$ -wymiarowej sieci z efektywnym parowaniem międzywęzłowym. Hamiltonian układu ma strukturę biliniową, którego widmo stanów kwazicząstkowych jest ściśle rozwiązywalne. Dla przypadku parowania o całkowitym zerowym pędzie dopuszczalne są jedynie warunki brzegowe  $d_{1+L,\sigma}^\dagger = e^{i\phi} d_{1,\sigma}^\dagger$  o charakterze periodycznym ( $\phi = 0$ ) lub antyperiodycznym ( $\phi = \pi$ ). Doktorant uwzględnił je przy definiowaniu współrzędnych Fouriera dla operatorów drugiej kwantyzacji a także uwzględnił różne symetrie amplitudy parowania  $\Delta_i$  na etapie diagonalizacji hamiltonianu przy pomocy transformacji Bogoliubowa-Valatina. BCS-owska postać funkcji stanu podstawowego  $|g\rangle$  w niejawnym sposób zależy od potencjału chemicznego i potencjału parowania  $J$ . Autor wyprowadził wyrażenie na wierność  $F = |\langle \bar{g} | g \rangle|$  za pomocą kąta Bogoliubowa oraz przedstawił wyrażenie na przestrzenną zależność diagonalnej  $\langle a_{0,\sigma}^\dagger a_{\mathbf{r},\sigma} \rangle$  i pozadiagonalnej (w reprezentacji Nambu) funkcji korelacyjnej  $\langle a_{0,\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{r},\downarrow} \rangle$ . Niezerowa wartość funkcji  $\langle a_{0,\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{r},\downarrow} \rangle$  realizuje się tylko w stanie nadprzewodzącym i ma ścisły związek ze spontanicznym złamaniem symetrii cechowania, które implikuje efekt Meissnera (doskonały diamagnetyzm). Treść rozdziału 2 zawiera przydatne informacje standardowej metody BCS. Z obowiązku recenzenta chciałbym jednak zwrócić uwagę na błędny znak przy potencjale chemicznym  $\mu$ , który pojawia się we wzorach na stronach 23 i 24 oraz pozostałej części pracy. W ramach wielkiego zespołu kanonicznego hamiltonian ma postać  $\mathcal{H} = H - \mu N$ , gdzie  $H$  opisuje sumę wkładu kinetycznego i potencjalnego. Z tego powodu wyrażenie na energię jednocząstkową powinno mieć następującą postać  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = (-t \sum_i \cos \kappa_i) - \mu$ . Na szczęście błędny znak przy potencjale chemicznym nie ma jakościowego wpływu na analizę uzyskanych wyników, gdyż skalowania oraz indeksy krytyczne są niezmiennicze na zamianę  $\mu \rightarrow -\mu$ .

Kolejny rozdział 3 szczegółowo dyskutuje charakterystykę skalowania krytycznego oraz wierności dla przypadku modelu jednowymiarowego. Doktorant rozpatrzył dwa warianty realizacji kwantowego punktu krytycznego: a) przypadek półzapełnionego pasma ( $\mu = 0$ ) z warunkiem  $\cos \kappa = 0$  oraz b) przypadek znikającego potencjału parowania  $J = 0$  z warunkiem  $\cos \kappa = \mu$ . Mam pewne wątpliwości odnośnie drugiego warunku, gdyż formalnie odnosi się do układu fermionów bez oddziaływania parującego (czyli cząstek swobodnych i wówczas widmo stanów elektronowych nie ma żadnej przerwy). Autor miał przypuszczalnie na myśli zachowania krytyczne towarzyszące zmianie znaku wielkości  $J\Delta$ . Przy pomocy zaawansowanych obliczeń numerycznych oraz oszacowań analitycznych określił wyznaczniki krytyczne wokół linii krytycznej  $J = 0$  i wokół  $\mu = 0$ . Zadanie to było z pewnością nietrywialne. Doktorant bardzo sprawnie zbadał przebieg funkcji korelacyjnej  $G(r) = \langle a_{0,\sigma}^\dagger a_{r,\sigma} \rangle$ , której obwiednia przy dużych odległościach wykazuje zachowanie asymptotyczne  $G(r) \propto r^{-\alpha} e^{r/\xi}$  z charakterystycznym skalowaniem długości korelacji  $\xi(\lambda) = |\lambda - \lambda_c|^\nu$ . Stwierdzono, że wartość indeksu krytycznego  $\nu$  jest bliska jedności (dla  $|\mu| < t$ ) lub dąży do  $1/2$  (dla potencjału chemicznego na granicy pasma  $|\mu| = t$ ). Autor zbadał również wierność (a właściwie ujemny logarytm wierności) względem odpowiednio sparametryzowanego potencjału parowania  $J$ . Podobnych oszacowań dokonał wzdłuż krytycznej osi  $\mu = 0$ , wyznaczając wartość indeksu krytycznego  $\nu \approx 1$ . Zbadał też skalowanie wierności dla układu małego i dla układu makroskopowego. Ostatni fragment w rozdziale trzecim omawia skalowanie wokół punktu multikrytycznego ( $\mu = 0, J = 0$ ). Doktorant stwierdził, że indeks krytyczny wynosi  $\nu \approx 2$ , niezależnie od kierunku zbliżania się do punktu multikrytycznego. Niektóre uzyskane wyniki porównywano z obliczeniami dla modelu XY, którego pokrewieństwo z omawianym scenariuszem wynika z transformacji Jordana-Wignera.

Kolejne dwa rozdziały dotyczą układu dwuwymiarowego z parametrem porządku o symetrii  $\Delta(\cos \kappa_x + \cos \kappa_y)$  oraz  $\Delta(\cos \kappa_x - \cos \kappa_y)$ . W fizyce materii skondensowanej są one określane mianem rozszerzonej fali typu  $s_{x^2+y^2}$  oraz odpowiednio fali typu  $d_{x^2-y^2}$ . Pierwszy z wymienionych charakteryzuje się liniami krytycznymi wokół  $J = 0$  i  $\mu = 0$ , analogicznie jak w przypadku jednowymiarowym. Doktorant zbadał asymptotyczne zachowanie funkcji korelacyjnej  $G(\mathbf{r}) = G(x, y)$ , osobno rozpatrując kierunek diagonalny oraz osiowy. Dla linii krytycznej  $J = 0$  indeks krytyczny  $\nu \approx 1$ , niezależnie od wyboru kierunku. Na podstawie przebiegu wierności zauważono jakościową zmianę skalowania między układem małym i makroskopowym. W zakresie makroskopowym uwidocznił się wpływ dodatkowej skali przestrzennej  $\tilde{\xi}$ . Dla punktu końcowego  $\mu/t = 2$  indeks krytyczny wynosi w przybliżeniu  $\frac{1}{2}$ . Autor był w stanie oszacować analitycznie wierność dla układu małego, uzyskując bardzo dobrą zgodność z wynikami numerycznymi. W przypadku skalowania wokół osi  $\mu = 0$  stwierdzono, że indeks krytyczny dla kierunku diagonalnego jest bliski jedności, natomiast dla kierunku osiowego oraz kilku innych (nie-diagonalnych) kierunków stwierdzono indeks krytyczny  $\nu \approx \frac{1}{2}$ . Na podstawie przebiegu



wierności (która jest wielkością izotropową) wyróżniono trzy odmienne zakresy, charakterystyczne dla układu małego (gdy  $L \leq \xi_{off}$ ) dla układu makroskopowego (gdy  $L \geq \xi_{dia}$ ) oraz obszar pośredni. W przypadku punktu multikrytycznego ( $J = 0, \mu = 0$ ) wartość indeksu krytycznego oszacowano na 2 dla kierunku diagonalnego oraz  $3/2$  dla kierunków nediagonalnych. Zachowanie kwantowej wierności wykazało wyraźny skok (nieciągłość) pomiędzy zakresem małego układu i rozmiarami makroskopowymi. Nieciągłość nie ma jednak związku z którąkolwiek długością koherencji.

Dla dwuwymiarowego układu z parametrem porządku typu fali  $d$  (określonej przez Autora jako przypadek *antysymetryczny*) można wskazać kierunki, dla których parametr porządku ma węzły. Z tego powodu dla dowolnego potencjału parowania  $J$  oraz w zakresie całej szerokości pasma  $-2t \leq \mu \leq 2t$  występują punkty krytyczne (czyli punkty węzłowe), co ilustruje rysunek 5.1. Doktorant wyznaczył indeksy krytyczne dla linii granicznej  $\mu/t = 2$ , oszacowując ich wartość na  $1/2$ . W tym granicznym przypadku uzyskał również wyrażenie analityczne na kwantową wierność, wybierając periodyczne warunki brzegowe wzdłuż osi  $x$  oraz anyperiodyczne wzdłuż osi  $y$ . Jakościowa zmiana skalowania wierności względem rozmiaru ma miejsce w pobliżu  $L \sim \xi$ , co można uznać za linię demarkacyjną między układami małymi i makroskopowymi.

W podsumowaniu, uważam Doktorant przeprowadził ciekawą analizę użyteczności kwantowej wierności do opisu kwantowych przejść fazowych w układach fermionowych z parowaniem. Rozpatrując układy jedno- i dwuwymiarowe dokonał oszacowania wartości liczbowej wyznaczników krytycznych w pobliżu punktów (oraz linii) zaniku przerwy energetycznej. W pracy doktorskiej wykazano, że za pomocą kwantowej wierności można określić wartość indeksu krytycznego ze skalowania w zakresie małych układów. W ogólności analiza ta jest jednak dość złożona i niekiedy wymaga uwzględnienia więcej niż jednej charakterystycznej długości korelacji.

Przedłożona rozprawa doktorska jest opracowana bardzo starannie, zarówno pod względem stylistycznym jak też merytorycznym. Część wstępna w klarowny sposób objaśnia techniczne aspekty pracy. Dalsze rozdziały przedstawiają wyniki oryginalnych obliczeń Autora. Na podkreślenie zasługują obszernie fragmenty obliczeń analitycznych kwantowej wierności oraz nietrywialne metody oszacowania silnie oscylującej funkcji korelacyjnej. Pod tym względem Doktorant wykazał się znakomitymi umiejętnościami. Z uwag krytycznych chciałbym jedynie zwrócić uwagę, że w języku polskim ułamki dziesiętne powinny być zapisywane z użyciem przecinka, Autor stosował zaś konwencję anglojęzyczną.

Moim zdaniem, niniejsza rozprawa spełnia zwyczajowe i formalne wymagania stawiane pracom doktorskim w ustawie o stopniach i tytułach naukowych. Przekazuję więc do Rady Instytutu Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Wrocławskiego wniosek o dopuszczenie pana magistra Mariusza Adamskiego do publicznej obrony i dalszych etapów przewodu doktorskiego.