

Recenzja pracy doktorskiej mgra Marka Millera

**„Matematyczne metody algebr operatorów w analizie kryterium splątania
złożonych układów kwantowych”**

Praca doktorska mgra Marka Millera poświęcona jest analizie matematycznej wybranych problemów w teorii kwantowego splątania. W szczególności autor koncentruje się na analizie odwzorowań dodatnich w algebrach operatorowych. Odwzorowania takie stanowią podstawowe narzędzie do wykrywania i klasyfikacji kwantowych stanów splątanych. Warto podkreślić, że teoria kwantowych stanów splątanych jest w ostatnich dwóch dekadach intensywnie rozwijana w związku z fundamentalnymi zastosowaniami w kwantowej teorii informacji. Uważa się powszechnie, że kwantowe stany splątane stanowią podstawowy zasób nowoczesnych technologii informatycznych bazujących na prawach mechaniki kwantowej. Bez wątpienia praca mgra Millera wpisuje się w aktualny nurt badań zarówno w kraju jak i na świecie.

Przedstawiona praca doktorska jest typową pracą z fizyki matematycznej. Całość, łącznie z bibliografią liczącą 61 pozycji, zajmuje 69 stron. Należy podkreślić, że praca jest napisana bardzo starannie i czytanie jej było dla mnie dużą przyjemnością.

W części I „Matematyczne metody analizy stanów splątanych” autor na kilku stronach zbiera podstawowe narzędzia matematyczne używane w dalszej części rozprawy. Autor przypomina definicję algebry von Neumanna, iloczyn tensorowy algebr von Neumanna, oraz liniowego odwzorowania dodatniego na algebrach von Neumanna. Pewien niedosyt pozostawia fakt, że w przypadku odwzorowań rozkładalnych autor rezygnuje z ogólnego podejścia i ogranicza się do algebr macierzowych. To samo dotyczy pojęcia odwzorowania „exposed”, które autor tłumaczy jako „odwzorowanie wystające”. Nie jestem pewien czy jest to udana próba.

Część II „Kryterium separowalności stanów kwantowych” zawiera interesujący wynik (opublikowany M. Miller, R. Olkiewicz, Infinite Dimensional Analysis Quantum Probability and Related Topics (2014)) będący uogólnieniem znanego kryterium Peresa-Horodeckiego na przypadek algebr von Neumanna i C^* -algebr. Uogólnienie to, które wydaje się dość naturalne, w istocie jest wysoce nietrywialne i wiąże się z iloczynem tensorowym algebr operatorowych. W przypadku algebr von Neumanna autor pokazał, że kryterium Peresa-Horodeckiego można uogólnić, jeśli dodatkowo założymy iniektywność jednej z algebr. Z kolei w przypadku C^* -algebr autor uogólnił kryterium Peresa-Horodeckiego zakładając, że jedna z algebr jest algebrą jądrową. Wynik ten oceniam bardzo wysoko. Doktorant pokazał, że posiada gruntowną wiedzę teoretyczną w dziedzinie algebr operatorowych oraz bardzo dobry warsztat badawczy.

Część III „Odwzorowania dodatnie na algebrach macierzowych” zawiera bardzo ciekawą analizę struktury odwzorowań dodatnich w algebrach M_2 oraz M_3 . Autor w pomysłowy sposób odtworzył znany wynik Woronowicza mówiący, że wszystkie odwzorowania dodatnie $M_2 \rightarrow M_2$ są rozkładalne. Pomysł polega na obserwacji, że macierze dodatnie w M_2

tworzą stożek Lorentza w R^4 . Tym samym odwzorowania dodatnie odpowiadają odwzorowaniom stożka w siebie, które są dobrze znane w szczególnej teorii względności. Podobną analizę dla stanów 2-kubitowych przeprowadzili Leinaas, Myrheim, Ovrum (PRA 2006) – wynik ten był przedstawiony kilka lat temu przez Leinaasa na konferencji w Toruniu.

Kolejny bardzo ciekawy wynik doktoranta dotyczy odwzorowań bistochastycznych w M_3 . Autor wykorzystał rezultat uzyskany wcześniej przez promotora pracy mówiący, że odwzorowanie bistochastyczne w M_n prowadzi do naturalnego rozkładu algebry M_n na sumę prostą dwóch podprzestrzeni, z których jedna jest algebrą Jordana. W przypadku algebry M_3 jej podalgebry Jordana są dobrze znane. Doktorant pokazał, że ekstremalne odwzorowanie bistochastyczne może prowadzić jedynie do trzech charakterystycznych algebr Jordana (Twierdzenie 3.9). Odwzorowania związane z dwiema algebrami były już znane w literaturze. Istotnym wkładem doktoranta jest konstrukcja odwzorowania odpowiadającego trzeciej dopuszczalnej algebrze. Doktorant pokazał, że odwzorowanie to jest nie tylko ekstremalne ale również „exposed” (wystające). Dodatkowo podał również stan kwantowy dwóch kutritów wykrywany przez odpowiedniego świadka splątania. Wynik ten został również opublikowany (OSID 2015). Co ciekawe został uogólniony w pracy Rutkowski i inni (OSID 2015) oraz ostatnio przez Marciniaka (wykład na konferencji w Korei – luty 2016).

Praca jest napisana bardzo starannie i znalazłem jedynie kilka drobnych potknięć: na str. 18 autor używa pojęcia „net operatorów” co wywołuje pewne zdziwienie widząc wcześniej zapał doktoranta do tłumaczenia terminu „exposed”. Na str. 41 jest błędna definicja normy śladowej: powinno być $\|Y\|_1 = \text{Tr}|Y|$, a na str. 44 autor pomylił iloczyn tensorowy z iloczynem skalarnym.

Autor kilkakrotnie powołuje się na tzw. izomorfizm Choi-Jamiołkowskiego. W Twierdzeniu 1.13 na str. 16 autor błędnie używa $E^*_{\{ij\}}$. Odwzorowanie, które spełnia (1.7) nie jest kompletnie dodatnie ale kompletnie ko-dodatnie. Podobny błąd jest we wzorze (3.58). Autor nie cytuje precyzyjnie wyniku uzyskanego przez Jamiołkowskiego i Choi: Jamiołkowski pokazał, że we wzorze (3.58) S jest dodatnie wtedy i tylko wtedy gdy W jest dodatni na wektorach produktowych. W tym przypadku nie jest istotne czy użyjemy sprzężenia czy też nie! W istocie wynik ten jest uzupełnieniem wcześniejszej pracy de Pillisa „Linear transformations which preserve hermitian and positive semidefinite operators” Pac. J. Math. **23** 129 (1967). De Pillis pokazał, że jeśli W jest operatorem dodatnim, to S jest odwzorowaniem dodatnim. Praca de Pillisa jest również punktem wyjścia dla wyników Choi. Detaliczna dyskusja tego zagadnienia znajduje się w pracach przeglądowych

- O. Gühne, and G. Tóth, „Entanglement detection” Phys. Rep. **474** 1 (2009)
- D. Chruściński and G. Sarbicki, „Entanglement witnesses: construction, analysis and classification” J. Phys. A : Math. Theor. **47**, 483001 (2014)

Wprowadzając termin „świadek splątania” na str. 7 autor cytuje pracę [6]. Warto przypomnieć, że termin ten został zaproponowany przez Terhal w pracy

- B.M. Terhal, „Bell inequalities and separability criterion” Phys. Lett. A **271** 319 (2000)

Autor pominął również wkład innych autorów zajmujących się uogólnieniem wyników teorii splątania na przypadek nieskończenie wymiarowy – prace Majewskiego, Belavkina oraz Ohya.

Ocena końcowa: Pracę doktorską mgra Marka Millera, mimo kilku uwag krytycznych, oceniam bardzo wysoko. Uważam, że spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane pracom doktorskim. Doktorant postawił szereg ambitnych problemów i uzyskał bardzo ciekawe rezultaty. Doktorant jest współautorem czterech publikacji w renomowanych pismach z dziedziny. Publikacje te zawierają wyniki prezentowane w pracy doktorskiej. Miałem również okazję kilkakrotnie słuchać wystąpień doktoranta na międzynarodowych konferencjach naukowych. Zarówno jego publikacje jak i wygłaszane referaty świadczą o głębokiej wiedzy teoretycznej i solidnym warsztacie badawczym. Wnoszę o dopuszczenie pana mgra Marka Millera do dalszego etapu przewodu doktorskiego.

D. Chruściński

Toruń, 9 maja 2016

prof. dr hab. Dariusz Chruściński