

Strunowe modele kosmologiczne
(Autoreferat)

Paweł Gusin
Uniwersytet Wrocławski, Instytut Fizyki Teoretycznej

Wrocław 2013

Spis treści

1. Wstęp	1
2. Inflacja w teorii struny	4
2.1 Modele inflacji pochodzące z teorii struny	7
3. Światy D-branowe	14
3.1 Stała kosmologiczna i D3-brana	14
3.2 Ewolucja D3-brany	24
4. Funkcja falowa D3-brany	33
4.1 Równanie Wheelera-De Witta dla D3-brany	39
5. Anizotropowa ewolucja D3-brany	48
6. Zamknięte krzywe czasowe w teorii strun	53
6.1 Struktura przyczynowa	53
6.2 Model sigma w metrykach typu Gödla	54
6.3 Struktura przyczynowa i T-dualność	60
7. Możliwe fakty obserwacyjne i podsumowanie	67
8. Literatura	69

1 Wstęp

Dzięki coraz lepszym instrumentom obserwacyjnym, otrzymujemy coraz dokładniejszy obraz Wszechświata. Na obraz ten składają się obserwacje mikrofalowego promieniowania tła (promieniowania relikтового) i jego fluktuacje, które są odpowiedzialne za powstawanie galaktyk, słabe soczewkowanie grawitacyjne, obserwacje serii α Lymana itd. Obserwacje odległych supernowych typu Ia prowadzą do wniosku, że istnieje tak zwana ciemna energia, która jest odpowiedzialna za coraz szybszą obecną ekspansję wszechświata. Tak więc Wszechświat staje się doskonałym laboratorium do testowania fundamentalnych teorii, które nie mogą być testowane w ziemskich laboratoriach z powodu niedostępności (obecnie) tak wysokich energii, które występowały w chwili wielkiego wybuchu.

Celem tej pracy jest zastosowanie teorii superstrun, a mówiąc ściślej - zastosowanie D-branowych modeli do kosmologii. D-brana jest rozpatrywana jako 3-wymiarowa hiperpowierzchnia zanurzona w 10-wymiarową czasoprzestrzeń, której geometria jest zadawana przez rozwiązania superstrunowe a dokładniej przez nisko-energetyczne przybliżenie tej teorii. Jest to jedno z podejść do zagadnienia otrzymania fundamentalnej teorii, ponieważ wnioski płynące z takich modeli mogą być testowane eksperymentalnie np. w promieniowaniu reliktowym.

Model standardowy (MS) oraz ogólna teoria względności (OTW) doskonale wyjaśniają fakty obserwacyjne w dwóch różnych skalach. MS opisuje kwantowy obraz świata w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego natomiast OTW znakomicie wyjaśnia zjawiska grawitacyjne w skali kosmologicznej. Grawitacja jest utożsamiana z geometrią czasoprzestrzeni, która jest zadawana rozkładem masy. OTW nie podlega kwantyzacji z powodu ultrafioletowych rozbieżności. Tak więc wszystkie zjawiska, w których grawitacyjne efekty kwantowe nie mogą być zaniedbywane, są poza zakresem stosowalności tych dwóch teorii. Efekty te występują tylko w dwóch przypadkach: na początku Wszechświata oraz w czarnych dziurach, będących końcową fazą istnienia gwiazd. Jak do tej pory jedyną kandydatką na teorię, która by opisywała kwantowe efekty grawitacyjne na poziomie zaburzeniowym, jest teoria superstrun (TS) [1,2,3].

Teoria superstrun jest supersymetryczną kwantową teorią jednowymiarowych obiektów (strun), które zastępują cząstki punktowe. W niskoenergetycznym przybliżeniu stany wzbudzeniowe strun reprezentują różne rodzaje cząstek punktowych. Jak się okazuje, jedynym parametrem teorii jest długość struny $l_s \sim \sqrt{\alpha'}$, gdzie α' jest nachyleniem Regge (Regge slope). Efekty strunowe pojawiają się na skalach energii struny: $1/\sqrt{\alpha'}$.

Ciągła natura strun oraz supersymetria narzucają silne warunki konsystencji na teorię. Warunki te prowadzą do pięciu różnych (!) teorii z różną liczbą czasoprzestrzennych supersymetrii (N) oraz różnymi grupami symetrii:

- Struna typu I (struna otwarta i nieorientowana struna zamknięta z $N = 1$ susy z grupą $SO(32)$)
- Struna typu IIA ($N = 2$ susy o różnych chiralnościach)
- Struna typu IIB ($N = 2$ susy o tych samych chiralnościach)
- Struna heterotyczna z grupą $SO(32)$ ($N = 1$ susy)
- Struna heterotyczna z grupą $E_8 \times E_8$ ($N = 1$ susy)

Warunek wynikający z zachowania symetrii konformnej na powierzchni świata superstruny dla wszystkich pięciu teorii na poziomie kwantowym prowadzi do 10-wymiarowej czasoprzestrzeni, w której te teorie są konsystentne. Jak widać z powyższego, aby dostać realistyczny model należy wybrać jedną z tych teorii oraz w jej ramach przejść z 10-wymiarowej czasoprzestrzeni do 4-wymiarowej czasoprzestrzeni (kompaktyfikacja). Przed odkryciem dualności jedynym kryterium wyboru teorii superstrun była fenomenologia, która prowadziła do wyboru strun heterotycznych i typu I z powodu dużych grup symetrii, które w procesie kompaktyfikacji dawały bogate spektrum pól cechowania w czterech wymiarach. Oprócz tego kryterium, nie istniało żadne inne i cała teoria superstrun stawała się problematyczna z podstawowego powodu: teoria fundamentalna powinna być jedna. Jednakże obraz, który się wyłonił, prowadził do wniosku, że każda z tych pięciu teorii może być rozpatrywana jako fundamentalna! W bezmasowym spektrum każdej teorii występuje cząstka identyfikowana z grawitonem, więc dostaje się pięć zaburzeniowych teorii kwantowej grawitacji.

Odkrycie dualności pozwoliło powiązać wszystkie pięć teorii w tak zwaną sieć dualności. Okazało się, że wszystkie te 10-wymiarowe teorie superstruny, są nisko-energetycznymi przybliżeniami odpowiednio kompaktyfikowanej 11-wymiarowej M-teorii (np. [4-8]). W jedenastu wymiarach, istnieje również teoria supergrawitacji, która jest niskoenergetycznym przybliżeniem M-teorii.

Mając tak powiązane pięć teorii superstrunowych można rozpatrywać 4-wymiarowe teorie otrzymywane przez redukcję wymiarową (kompaktyfikacja Kaluzy-Kleina) jednej z pięciu teorii superstrun, wierząc że otrzymana fizyka jest niezależna od wyboru którejkolwiek z nich z powodu istnienia dualności. Struktura 4-wymiarowej teorii jest bardzo czuła na wybór 6-wymiarowej rozmaitości, której wymiary są kompaktyfikowane. Supersymetria narzuca warunki na dopuszczalne 6-wymiarowe rozmaitości, które podlegają kompaktyfikacji. Są to rozmaitości Calabi-Yau (CY), które są zwartymi, zespolonymi, Kählerowskimi rozmaitościami z grupą holonomii $SU(3)$. Z warunków tych wynika, że istnieje metryka, dla której tensor krzywizny Ricciego znika. Z fenomenologicznego punktu widzenia niskoenergetyczne przybliżenie powinno zawierać w swoim spektrum pola cechowania, które generowałyby Model Standardowy i były wolne od bezmasowych, nienaładowanych pól skalarnych powodujących odchylenia od 4-wymiarowej grawitacji. Jednakże w procesie kompaktyfikacji, pojawia się całe spektrum bezmasowych pól skalarnych w czterech wymiarach. Pola te pochodzą od parametrów (modułów bądź moduli), opisujących kształt oraz rozmiary 6-wymiarowej rozmaitości CY. Aby model był realistyczny, należy pola te ustabilizować i znaleźć dla nich potencjał w ramach teorii struny. Minimum potencjału będzie określać wartości pól i w efektywnej 4-wymiarowej teorii pola staną się niedynamiczne. Z drugiej strony wiadomo, że w supergrawitacyjnych teoriach taki potencjał określa sposób łamania supersymetrii. Najlepiej poznany sposób, generacji potencjału zależnego od pól modułów jest w teorii struny Typu II. W ramach tej teorii, istnieją trzy metody generacji potencjału dla modułów:

- poprzez strumienie pól tła (np. [9-13,38]),
- poprzez poprawki instantonowe (np. [17-18]),
- poprzez efekty kondensacji gaugino (np. [19-24]).

Pełna stabilizacja odbywa się poprzez uwzględnienie wszystkich tych metod. Jednakże, w niskoenergetycznym sformułowaniu teorii Typu II, nie istnieją nie-abelowe grupy cechowania, odpowiedzialne za pojawienie się pól cechowania w 4-wymiarowej efektywnej teorii pola. Dopiero odkrycie dualności, pozwoliło wprowadzić pola cechowania do teorii Typu II, poprzez uwzględnienie D-bran [2, 25-29], będących nośnikami ładunków pól cechowania. Okazało się, że kompaktyfikacja 10-wymiarowej czasoprzestrzeni wypełnionej D-branami oraz uwzględnienie potencjałów dla modułów, dostarcza wiele możliwości zarówno do budowania modeli w teorii pola jak i w kosmologii [30-35]. Również D-brany pojawiają się jak niezbędne stopnie swobody w dwu-wymiarowych supresymetrycznych kwantowych teoriach [36]. Zagadnienie otrzymania cztero-wymiarowego rozwiązania

de Sittera z teorii struny, zostało wstępnie po raz pierwszy rozwiązane przy użyciu D-bran w [37]. Było to możliwe, dopiero gdy została uwzględniona stabilizacja modułów [38-40]. Wyprowadzeniu inflacji z teorii struny poświęcono wiele uwagi [41-60] w oparciu o różne techniki i narzędzia badawcze.

W rozdziale 2 przedstawiam warunki jakie muszą być spełnione, aby zaszła inflacja na D3-branie z polem tachionowym. Taka brana jest równoważna branie, na której nie jest spełniony warunek BPS (non-BPS brane), czyli nie jest ona maksymalnie supersymetryczna. Taką branę uważam jako model 4-wymiarowego wszechświata ze złamaną supersymetrią. Wynik, który otrzymuję, jest związany z inflacją w objętości-świata 3-brany. Rozdziały 3 i 4 są poświęcone zagadnieniom stałej kosmologicznej na D3-branie, ekspansji jej objętości-świata oraz kwantowej grawitacji opisywanej przez równanie Wheelera-de Witta. W Rozdziale 5 rozpatruję anizotropową ewolucję D3-brany z zadaną topologią oraz w ustalonym tle. Równania opisujące tę ewolucję to równania Friedmanna z dwoma parametrami Hubble. Z warunku równości tych parametrów (izotropowa ewolucja) dostaję wartości parametrów (ładunek oraz masę na jednostkę objętości) tła. W rozdziale 6 zajmuję się strukturą przyczynową niskoenergetycznych rozwiązań struny. W niektórych rozwiązaniach pojawiają się zamknięte krzywe czasowe (ZKC). Jednakże będąc w reżimie strunowym można wykonać transformacje T-dualności. W wyniku tej operacji dostaje się rozwiązania bez ZKC. Jednakże pojawiają się ograniczenia na pozostałe pola rozwiązań.

Otrzymane tam przeze mnie wyniki mogą modelować niektóre z możliwych historii naszego Wszechświata. Rozdział 7 jest poświęcony możliwym obserwacjom, które pozwoliłyby weryfikować przewidywania otrzymywane z teorii strun, oraz zawiera podsumowanie.

2 Inflacja w teorii struny

Inflacja zachodzi dla skali energii $M_I \leq 10^{15} GeV$, która jest mniejsza od 4-wymiarowej skali Plancka $M_P = (8\pi G)^{-1/2} \simeq 10^{18} GeV$ o 3 rzędy wielkości. Wynika stąd, że kwantowe efekty grawitacji mają swój udział i powinny być uwzględnione w każdym modelu inflacyjnym. Obecnie jedyną teorią, która opisuje kwantową teorię grawitacji (na poziomie zaburzeniowym) jest teoria strun. Teoria ta powinna prowadzić do obserwowanych inflacyjnych efektów a tym samym dawać możliwość doświadczalnego sprawdzenia teorii strun.

Skale energii w inflacji, wyprowadzanej z teorii strun to: skala struny M_s , skala kompaktifikacji (skala Kaluzy - Kleina (KK)) M_c oraz skala inflacji M_I . 4-wymiarowa skala Plancka M_P jest związana ze skalą kompaktifikacji oraz skalą struny: $M_P = g_s^{-1} M_s (M_s/M_c)^3 \gg M_s$, gdzie g_s jest stałą sprzężenia struny (jest to wartość oczekiwana pola dylatonu ϕ). Nisko-energetyczne przybliżenie teorii strun przez supergrawitacyjne teorie w dziesięciu lub jedenastu wymiarach jest poprawne, gdy zachodzi następujący związek między skalami energii $M_c \ll M_s$. Przewidywania modelu inflacyjnego otrzymanego z teorii strun zależą od wartości skali energii Hubbla H_I , zdefiniowanej w następujący sposób: $H_I = M_I^2/M_P$. Skala ta pozwala na klasyfikację możliwych modeli i

przewidywań, które z nich wynikają. Jeżeli $M_s \lesssim H_I$, to inflacja jest zjawiskiem czysto strunowym i jej opis zależy od wszystkich efektów strunowych. W takim wypadku, właściwe zrozumienie procesu inflacji pozostawia wiele do życzenia. Następną możliwością jest tak, że: $M_c \ll H_I \ll M_s$. Wtedy, inflacja jest opisywana przez nisko-energetyczne przybliżenia teorii strun razem ze wszystkimi 10-wymiarowymi efektami. W przypadku gdy $H_I \ll M_c \ll M_s$, to inflacja jest zjawiskiem opisywanym przez 4-wymiarową efektywną teorię, otrzymaną z kompaktifikacji nisko-energetycznego przybliżenia teorii strun. Zależne od czasu rozwiązania tej 4-wymiarowej teorii dają przewidywania teorii inflacji.

W ostatnich dwóch przypadkach ($M_c \ll M_s$), przybliżenie nisko-energetyczne jest zadawane przez 10-wymiarowe teorie supergrawitacyjne. W tym wymiarze jest kilka takich teorii. Każda z nich zawiera w sektorze bozonowym 10-wymiarową metrykę g_{MN} , dylaton ϕ oraz antysymetryczne pole cechowania B_{MN} (pola pochodzące z sektora NS). W zależności od rozpatrywanej teorii pojawiają się nieabelowe potencjały cechowania A_M^a w 10 wymiarowym supermultiplicie cechowania, gdzie indeks a odnosi się do grupy cechowania. Z sektora RR otrzymuje się antysymetryczne pola $C_{M_1 \dots M_n}$ rzędu n . Dodatkowymi polami są pola opisujące położenia Dp-bran w dziesięciu wymiarach: $X^M(\xi)$ gdzie $\xi = (\xi^0, \dots, \xi^p)$. Warunki spójności narzucają ograniczenia na wymiar p : w supergrawitacji typu IIA $p = 0, 2, 4, 6, 8$, dla teorii typu IIB $p = 1, 3, 5, 7, 9$. W heterotycznych teoriach nie występują Dp-brany. Jednakże we wszystkich teoriach pojawia się NS5-brana.

Kompaktifikacje do czterech wymiarów teorii typu IIB mają dwie wspólne cechy [38, 39, 40]:

- są one bądź $N = 1$ supersymetryczne w czterech wymiarach, albo łamią tę supersymetrię dla skali energii mniejszych niż M_c
- pojawia się, przynajmniej jedno bezmasowe pole modułów w czterech wymiarach.

Wszystkie kompaktifikacje mają problem ze stabilizacją pól modułów. Warunki supersymetrii prowadzą do tego, aby rozmierność podlegająca kompaktifikacji była rozmiernością Calabi-Yau. Parametry (moduły), które określają jej kształt i rozmiary, stają się bezmasowymi polami skalarnymi w czterech wymiarach. Pola te muszą być ustabilizowane, tzn. ich wartości mają realizować minimalną wartość potencjału. Jak się okazuje, najbardziej efektywną metodą stabilizacji jest wprowadzanie bran i strumieni [38]. Wprowadzenie bran, owijających różne cykle rozmierności Calabi-Yau, prowadzi do modyfikacji 10-wymiarowej metryki. Fizycznym powodem tej modyfikacji jest grawitacyjne oddziaływanie bran. Same brany są źródłami pól, których strumienie przez topologicznie nietrywialne cykle są skwantowane. Obecność strumieni ma następujące konsekwencje: mogą one powodować łamanie 4-wymiarowej supersymetrii oraz stabilizować niektóre z pól modułów. Jak się okazuje, w teorii IIB strumienie stabilizują moduły struktur zespolonych.

Bozonowe pola występujące w 4-wymiarowej supergrawitacji można podzielić na trzy kategorie: i) chiralny multiplet, którego składnikami są zespolone pola

skalarnie ϕ^i , ii) multiplety cechowania składające się z potencjałów cechowania A_μ^a oraz iii) multiplet gravitacyjny składający się z bezmasowych pól Kaluzy-Kleina powstających w wyniku kompaktyfikacji 10-wymiarowej metryki. Ponieważ moduły są polami skalarnymi w czterech wymiarach, to należą one do chiralnego multipletu i są reprezentowane przez pola zespolone.

Oddziaływania między tymi polami są w zadawane (w niskich energiach) przez trzy funkcje zależne od pól skalarnych ϕ^i z chiralnego multipletu:

- i) holomorficzny superpotencjał $W(\phi)$,
- ii) holomorficzną funkcję sprzężeń cechowania $f_{ab}(\phi)$,
- iii) potencjał Kählera $K(\phi, \bar{\phi})$ na przestrzeni pól skalarnych.

Kinetyczne wyrazy dla potencjałów cechowania A_μ^a mają postać:

$$\frac{L_g}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{4} (\text{Re } f_{ab}) F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}, \quad (2.1)$$

gdzie $g = \det(g_{\mu\nu})$ oraz $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - [A_\mu, A_\nu]^a$. Lagranżian dla pól skalarnych jest dane przez:

$$\frac{L_s}{\sqrt{-g}} = -G_{i\bar{j}} \partial^\mu \phi^i \partial_\nu \bar{\phi}^{\bar{j}} - V(\phi, \bar{\phi}), \quad (2.2)$$

gdzie $G_{i\bar{j}} = \partial^2 K / (\partial \phi^i \partial \bar{\phi}^{\bar{j}})$ jest metryką Kählera dla potencjału K , oraz skalarny potencjał składa się z dwóch części V_D oraz V_F :

$$V = V_D + V_F. \quad (2.3)$$

Potencjał V_D występuje tylko wtedy, gdy istnieje nisko-energetyczny multiplet cechowania, sprzężony z polami skalarnymi:

$$V_D = \frac{1}{2} f^{ab} D_a D_b, \quad (2.4)$$

gdzie f^{ab} jest elementem macierzy: $(f^{ab}) = (\text{Re } f_{ab})^{-1}$ oraz:

$$D_a = \partial_i K \delta_a \phi^i \quad (2.5)$$

$\delta_a \phi^i$ oznacza nieskończoną transformację cechowania pola ϕ^i . Potencjał V_F ma postać:

$$V_F = e^{K/M_P^2} \left[G^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \bar{W} - \frac{3}{M_P^2} |W|^2 \right], \quad (2.6)$$

a wielkość $D_i W$ oznacza pochodną kowariantną superpotencjału W :

$$D_i W = \partial_i W + \frac{1}{M_P^2} W \partial_i K. \quad (2.7)$$

Tak więc minimum potencjału (2.3) da wartości ustabilizowanych pól modułów w 4 wymiarach. W ogólnym przypadku należy znaleźć superpotencjał W , funkcje f_{ab} oraz potencjał K .

Z punktu widzenia 10-wymiarowej teorii, wyznaczanie powyższych wielkości sprowadza się do redukcji wymiarowej w sensie Kaluzy-Kleina (KK), jednej z supergrawitacyjnych teorii. Jeżeli taka procedura prowadzi do stabilizacji modułów, to można się zająć problemem zanurzenia inflacji w teorii superstruny. Pierwszy z mniej więcej realistycznych scenariuszy takiego wyprowadzenia inflacji z teorii struny został przeprowadzony w [54].

2.1 Modele inflacji pochodzące z teorii struny

Ażeby otrzymać jakikolwiek model inflacji, należy zidentyfikować pole (lub pola), które można będzie uważać za inflanton, znaleźć odpowiedni potencjał a następnie określić warunki prowadzące do inflacji. W przypadku, w którym zakłada się z góry, że inflanton jest zadany jednym polem z potencjałem V , to warunki prowadzące do inflacji są określone przez parametry ε i η :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{m_P V'}{V} \right)^2, \quad (2.8)$$

$$\eta = \frac{m_P^2 V''}{V}, \quad (2.9)$$

gdzie m_P to masa Plancka a prim oznacza pochodną po polu. Inflacja zachodzi gdy $\varepsilon \ll 1$ oraz $|\eta| \ll 1$. Warunki te są znane pod nazwą powolnego staczania (slow-roll). Inflanton powoli stacza się po powierzchni potencjału w kierunku najmniejszej energii.

W teorii strun pola mogące odpowiadać za inflację, są identyfikowane z polami modułów pojawiającymi się w efektywnej 4-wymiarowej teorii. Jeżeli wszystkie pola modułów są ustabilizowane oprócz jednego, które utożsamiamy z polem inflantonu, to powstaje pytanie czy istnieją rejony zmienności tego pola, w których są spełnione warunki powolnego staczania. Okazuje się, że inflacja dla jednego modułu nie jest możliwa. Jednakże, dla dwóch zespolonych niestabilizowanych pól modułów inflacja staje się możliwa [40]. Potencjał, który się otrzymuje, to tak zwany "racetrack potential". Otrzymany on jest z superpotencjału W , który w tym przypadku ma postać:

$$W = W_0 + Ae^{-a\tau_1} + Be^{-b\tau_2}, \quad (2.10)$$

gdzie τ_1 i τ_2 są zespolonymi modułami struktury Kählerowskiej dla rozmaitości Calabi-Yau $\mathbf{P}_{[1,1,1,6,9]}^4$:

$$\tau_a = x_a + iy_a. \quad (2.11)$$

Inflacja w tym modelu, występuje dla szczególnych wartości parametrów superpotencjału i jest bardzo czuła na zmiany tych parametrów.

Inny model 4-wymiarowej inflacji jest otrzymywany ze względnego ruchu bran. Inflanton w tym modelu jest utożsamiany ze względną odległością brany i anty-brany [31, 32]. Dynamika takiego układu jest opisywana przez różne

siły działające między branami i jest zadana odpowiednim efektywnym potencjałem. Dla układu równoległych D3-brany i anty-D3-brany znajdujących się w odległości $r \gg M_s^{-1}$ efektywny potencjał ma postać:

$$V_{eff}(r) = 2T_3 \left(1 - \frac{1}{16\pi^2 T_3 r^4} \right), \quad (2.12)$$

gdzie T_3 jest naprężeniem D3-brany. Warunki powolnego staczania inflantonu r w tym modelu prowadzą do oszacowania skali kompaktifikacji M_c :

$$M_c = (V_c)^{-1/6} \simeq 10^{12} GeV, \quad (2.13)$$

gdzie V_c jest objętością przestrzeni skompaktyfikowanej. Wzajemne przyciąganie bran powoduje zmniejszanie odległości r , więc powyższy efektywny potencjał przestaje być prawdziwy dla odległości nie spełniających warunku $r \gg M_s^{-1}$. W układzie pojawia się tachion gdy $r \simeq l_s$ ($l_s = M_s^{-1}$ jest fundamentalną długością struny) i zostaje utracona stabilność jeszcze przed anihilacją bran. Przypadki przecinających się bran o różnych wymiarach prowadzących do inflacji zostały rozpatrywane w szeregu różnych prac [43-56]. Wszystkie te modele przypominają model inflacji hybrydowej, w której warunki inflacji są naruszone dla pewnej wartości inflantonu i tym samym kończą epokę inflacji, kiedy pole inflantonu przekroczy pewną wartość krytyczną. W tych modelach wartości krytyczne leżą poniżej l_s , gdzie warunki powolnego staczania są naruszone i tym samym inflacja jest zakończona. Aby przewidywania powyższych modeli były spójne, należy uwzględnić problem stabilizacji modułów, o którym wspominałem powyżej.

Przy założeniu, że moduły są ustabilizowane z wyjątkiem jednego (inflantonu) r , wprowadzenie dodatkowej D3-brany do układu powoduje zmianę Kählerowskiego potencjału oraz superpotencjału W . Potencjał Kählera ma postać:

$$K = -3 \ln (r^4 - \kappa k(y, \bar{y})), \quad (2.14)$$

gdzie $k(y, \bar{y})$ jest potencjałem Kählera dla metryki rozmaitości Calabi-Yau w punkcie, w którym znajduje się D3-brana. W [54] został użyty powyższy potencjał do znalezienia modelu inflacyjnego.

Innym modelem opisującym inflację jest model związany z działaniem dla D-brany w postaci Diraca-Borna-Infelda (DBI) [58-60]. W modelu tym warunki określające powolne staczanie muszą być zmienione z powodu dużych prędkości D-brany w określonej geometrii Calabi-Yau. Takie uogólnione warunki są wyprowadzone z warunku stałości parametru Hubbla H w okresie inflacji [61]. Określenie warunków inflacji z działaniem DBI dla D-brany w przypadku występowania pola tachionowego zostało podane przeze mnie w [62] w przypadku gdy N Dk-bran owija się wokół $(8-k)$ -wymiarowej rozmaitości Y z metryką g_{mn} . Metryka tła G_{MN} , dylaton ϕ oraz pole $\tilde{A}_{(k+1)}$ dla takiego układu mają postać:

$$G_{MN} dX^M dX^N = \lambda \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + \lambda^{-1} (dr^2 + g_{mn} dX^m dX^n), \quad (2.15)$$

$$e^{-\phi} = \lambda^{(3-k)/2}, \quad (2.16)$$

$$\tilde{A}_{(k+1)} = \lambda^2 dt \wedge dX^1 \wedge \dots \wedge dX^k, \quad (2.17)$$

gdzie $\lambda = [H_k(r)]^{-1/2}$ i $H_k(r)$ jest funkcją harmoniczną.

W [62] rozpatrujemy Dp-branę, która nie jest maksymalnie supersymetryczna (nie spełnia warunków BPS (non-BPS)) oraz wymiar p spełnia warunek $p < k$. Brana ta jest zanurzona w geometrię opisaną powyżej. Działanie dla niej ma postać [63]:

$$S = -T_p \int d^{p+1} \xi \tilde{v}(T) e^{-\phi} \sqrt{-\det(\gamma_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} + \partial_\mu T \partial_\nu T)} + T_p \int \tilde{v}(T) dT \wedge X^* \tilde{A}_{(k+1)}, \quad (2.18)$$

gdzie T jest polem tachionowym z potencjałem \tilde{v} .

Dla następującego pola zanurzenia:

$$X^M(t, \xi^1, \dots, \xi^p) = (t, \xi^1, \dots, \xi^p, r(t, \xi^1, \dots, \xi^p), \theta^1, \dots, \theta^{8-p}), \quad (2.19)$$

działanie (dla $F = B = 0$) przyjmuje postać:

$$S = -T_p \int d^{p+1} \xi \tilde{v}(T) e^{-\phi} \sqrt{-\det(\lambda \eta_{\mu\nu} + \lambda^{-1} \partial_\mu r \partial_\nu r + \partial_\mu T \partial_\nu T)} + T_p \int \tilde{v}(T) dT \wedge X^* \tilde{A}_{(k+1)} \quad (2.20)$$

a metryka $\gamma_{\mu\nu}$ ma formę:

$$\gamma_{\mu\nu} = \lambda \eta_{\mu\nu} + \lambda^{-1} \partial_\mu r \partial_\nu r. \quad (2.21)$$

Pierwszy wyraz po lewej stronie w (2.20) można przepisać jako:

$$S = - \int d^{p+1} \xi v(T) \lambda^{(4+p-k)/2} \sqrt{\det(I + \eta^{-1} S)}, \quad (2.22)$$

gdzie macierz S ma składowe:

$$S_{\mu\nu} = \lambda^{-2} \partial_\mu r \partial_\nu r + \lambda^{-1} \partial_\mu T \partial_\nu T \quad (2.22a)$$

oraz $v(T) = T_p \tilde{v}(T)$. Ograniczamy się do przypadku, gdy pole tachionu T i pole r zależą tylko od czasu t . Więc działanie przyjmują postać:

$$S[r, T] = - \int d^{p+1} \xi v(T) \lambda^{(4+p-k)/2} \sqrt{1 - \lambda^{-2} \dot{r}^2 - \lambda^{-1} \dot{T}^2} + T_p \int v(T) dT \wedge X^* \tilde{A}_{(k+1)}. \quad (2.23)$$

Powyższe działanie jest poprawne dla odległości r większych niż fundamentalna długość struny l_s pomiędzy Dp-braną i k-branami tworzącymi tło. Działanie to jest sprzęgnięte z grawitacją w objętości świata Dp-brany oraz wymiar p jest równy 3. Efektywne działanie dla rozpatrywanego układu jest następujące:

$$S_{eff} = \int d^4 x \frac{m_P^2}{2} \sqrt{-\gamma} R + S[r, T], \quad (2.24)$$

gdzie 4-wymiarowa masa Plancka m_P jest równa $(8\pi G)^{-1/2}$ natomiast skalar krzywizny R jest otrzymywany z metryki (2.21). W przypadku, gdy r jest jednorodne i zależy tylko od czasu t oraz metryka w objętości świata ma formę:

$$ds^2 = -\sigma dt^2 + \lambda \delta_{mn} dx^m dx^n, \quad (2.25)$$

to Lagranżian L dla pól r i T jest otrzymany z (2.23) i jest równy: $L = v(T) e^{-\Phi} \sqrt{1 - \dot{T}^2 / \sigma}$ gdzie $\Phi = \phi - \frac{3}{2} \ln \lambda - \frac{1}{2} \ln \sigma$ oraz:

$$\sigma = \lambda(r) - \frac{\dot{r}^2}{\lambda(r)}. \quad (2.26)$$

Tensor energii-pędu dla takiego układu jest postaci:

$$T_{00} = \frac{\sigma v e^{-\phi}}{\sqrt{1 - \dot{T}^2 / \sigma}}, \quad (2.27)$$

$$T_{mn} = -\lambda v(T) e^{-\phi} \left(1 - \dot{T}^2 / \sigma\right)^{1/2} \delta_{mn}. \quad (2.28)$$

Równania pola $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$ są następujące:

$$H^2 + \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} H \left(\frac{\sigma}{a^2} - 1\right) = 8\pi G \frac{\sigma v e^{-\phi}}{3\sqrt{1 - \dot{T}^2 / \sigma}}, \quad (2.29)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} H = 8\pi G \sigma v e^{-\phi} \left(1 - \dot{T}^2 / \sigma\right)^{1/2}, \quad (2.30)$$

gdzie $a^2 = \lambda$ i parametr Hubble H jest równy $H = \dot{a}/a$. Równanie ruchu dla T jest postaci:

$$\frac{\ddot{T}}{1 - \dot{T}^2 / \sigma} + (6 - k) H \dot{T} + \frac{v'}{v} \sigma - \frac{1}{2} \frac{\dot{T}}{1 - \dot{T}^2 / \sigma} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = 0. \quad (2.31)$$

Dla $\sigma = 1$ pole Φ jest związane z λ w następujący sposób $e^{-\Phi} = \lambda^{\beta+1/2}$. Więc równania (2.29) i (2.30) redukują się do formy (zauważmy, że $e^{-\phi} = a^{2\beta+1}$):

$$H^2 = 8\pi G \frac{v a^{2\beta+1}}{3\sqrt{1 - \dot{T}^2}}, \quad (2.32)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G \frac{v a^{2\beta+1}}{3\sqrt{1 - \dot{T}^2}} \left(1 - 3\dot{T}^2 / 2\right), \quad (2.33)$$

gdzie $\beta + 1/2 = (3 - k)/2$. Więż $\sigma = 1$ mówi, że metryka (2.25) jest przestrzen-
nie płaska z czynnikiem skali a^2 . Dla $\beta = -1/2$ (odpowiada to $k = 3$) i $\sigma = 1$
otrzymujemy dobrze znane formy równań.

Ażeby dostać warunki na inflację w rozpatrywanym układzie, używamy para-
metrów z pracy [61]. Są one zdefiniowane w następujący sposób:

$$\varepsilon_{i+1} = \frac{d \ln |\varepsilon_i|}{dN}, \quad (2.34)$$

gdzie $\varepsilon_0 = H_0/H$ oraz H_0 jest parametrem Hubble w pewnym wybranym okresie
czasu. Parametr Hubble jest funkcją liczby e-krotnych powiększeń (e-foldings)
 N , która jest zadana przez związek: $N = \int_{t_{init}}^{t_{end}} H dt$. Parametry ε_i jako funkcje
czasu spełniają równanie:

$$H \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} = \dot{\varepsilon}_i. \quad (2.35)$$

Używając równań (2.31) i (2.32) oraz relacji $dT/dN = \dot{T}/H$ otrzymujemy pier-
wsze dwa parametry ε_1 i ε_2 :

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{H} \frac{dH}{dT} \frac{dT}{dN} = -(\beta + 1/2) + (\beta + 2) \dot{T}^2, \quad (2.36)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon_1}{dT} \frac{dT}{dN} = \frac{2(\beta + 2) \dot{T} \ddot{T}}{\left[-(\beta + 1/2) + (\beta + 2) \dot{T}^2 \right] H}. \quad (2.37)$$

Więc równanie (2.32) jako funkcja ε_1 jest postaci:

$$H^2 \sqrt{1 - \frac{2}{3} \varepsilon_1} = \frac{8\pi G}{3\sqrt{3}} v a^{2\beta+1} \sqrt{2\beta + 4}. \quad (2.38)$$

Pochodna tego równania względem czasu t , daje następujące wyrażenie:

$$-2\sqrt{(\beta + 2) \tilde{\varepsilon}_1} \frac{[1 - \frac{2}{3} \varepsilon_1 + \frac{1}{6} \eta \varepsilon_2]}{1 - 2\varepsilon_1/3} = \frac{v'}{vH}, \quad (2.39)$$

gdzie: $\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + \beta + 1/2$ oraz $\eta = \varepsilon_1/\tilde{\varepsilon}_1$. Druga pochodna (2.38) jest równa:

$$(2\varepsilon_1 - \eta\varepsilon_2) + \frac{\varepsilon_2}{3} \left[5\varepsilon_1 - \frac{\eta(3\eta - 2)}{2} \varepsilon_2 - \eta\varepsilon_3 \right] \gamma^2 + \\ + 4\tilde{\varepsilon}_1 \left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon_1 - \frac{1}{6} \eta \varepsilon_2 \right) \left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon_1 + \frac{1}{6} \eta \varepsilon_2 \right) \gamma^4 = \frac{v''}{(\beta + 2) v H^2}, \quad (2.40)$$

gdzie $\gamma^2 = (1 - 2\varepsilon_1/3)^{-1}$. Mając równania (2.39) i (2.40) wyznaczamy para-
metry ε_1 i ε_2 z dokładnością do pierwszego rzędu:

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{3}{2} \right)^{5/2} \frac{m_{Pl}^2}{(2 + \beta)^{3/2} (1 - 4\beta)} \frac{v'^2}{v^3} e^\phi - \frac{3}{2} \frac{1 + 2\beta}{1 - 4\beta}, \quad (2.41)$$

$$\eta\varepsilon_2 = 3\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{m_{Pl}^2}{(2+\beta)^{3/2}}\left[\frac{4-\beta}{1-4\beta}\frac{v'^2}{v^3}-\frac{v''}{v^2}\right]e^\phi - 6\frac{(1+\beta)(1+2\beta)}{1-4\beta}, \quad (2.42)$$

gdzie $e^\phi = a^{-2\beta-1}$. Z (2.42) otrzymujemy drugi parametr ε_2 wyrażony przez ε_1 :

$$\varepsilon_2 = \frac{4(4-\beta)}{3}\varepsilon_1 - 3s\frac{v''}{v^2} + (1+2\beta)\left[\frac{2}{3}(7-\beta) + \frac{2(1+2\beta) - 3sv''/v^2}{2\varepsilon_1}\right], \quad (2.43)$$

oraz $s = \sqrt{3/2}m_{Pl}^2(2+\beta)^{-3/2}e^\phi$. Inflacja zachodzi, gdy $0 < \varepsilon_1 < 1$. Liczba N wyrażona przez pole tachionu T i pole dylatonu ϕ jest równa:

$$N = \int_T^{T_{end}} \frac{H}{T} dT = -\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{(2+\beta)^{3/2}(1+16\beta+4\beta^2)}{2m_{Pl}^2(1-4\beta)} \int_{T_{end}}^T \frac{v^2}{v'} e^{-\phi} dT + \frac{1}{3} \int_{T_{end}}^T \left(\frac{11-2\beta}{2(1-4\beta)} \frac{v'}{v} - \frac{v''}{v'}\right) dT. \quad (2.44)$$

Ponieważ wymiar rozmierności Y jest równy $8-k$ (równania (2.15)-(2.17)), przypadek $\beta = -1/2$ odpowiada geometrii tła wytwarzanego przez D-brany owijające 5-wymiarową rozmierność. W tym przypadku parametry ε_1 i ε_2 stają się standardowymi parametrami rozpatrywanymi w inflacji tachionowej. Okres inflacji jest zakończony, gdy pola T i r przyjmują wartości, dla których zachodzi związek $\varepsilon_1(T_{end}, r_{end}) = 1$. Wielkości obserwowane: skalarny indeks spektralny n_s i tensorowy indeks spektralny n_T są związane z wyprowadzonymi parametrami w następujący sposób [64]:

$$n_s = 1 - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - [2\varepsilon_1^2 + 2C\varepsilon_1\varepsilon_2], \quad (2.45)$$

$$n_T = -2\varepsilon_1[1 + \varepsilon_1 + (1+C)\varepsilon_2], \quad (2.46)$$

gdzie stała $C = -2 + \ln 2 + \gamma \simeq -0.72$ oraz γ jest stałą Eulera.

Znając ewolucję czasową pola tachionu $T = T(t)$, wyznaczą potencjał tachionu v , gdy pole r i dylaton ϕ są stałymi polami, natomiast metryka jest γ jest izotropowa i jednorodna:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\mathbf{x}^2. \quad (2.47)$$

W takim wypadku działanie efektywne (5.24) daje równania ruchu:

$$H^2 = \frac{1}{3m_{Pl}^2} \frac{V}{\sqrt{1-\dot{T}^2}}, \quad (2.48)$$

gdzie $V = v(T)e^{-\phi}$. Równanie ruchu dla T jest otrzymywane z (5.30) dla $k = 3$ i ma postać:

$$\frac{\ddot{T}}{1-\dot{T}^2} + 3H\dot{T} + \frac{V'}{V} = 0. \quad (2.49)$$

Z tych dwóch ostatnich równań otrzymujemy równanie na V jako funkcję czasu:

$$\dot{V} + g(t)V^{3/2} + f(t)V = 0, \quad (2.50)$$

gdzie:

$$g(t) = \frac{\sqrt{3}}{m_{Pl}} \frac{\dot{T}^2}{\left(1 - \dot{T}^2\right)^{1/4}}, \quad f(t) = \frac{\ddot{T}\dot{T}}{1 - \dot{T}^2}.$$

Jest to równanie Bernoulliego, którego rozwiązanie jest otrzymane przez następującą zamianę zmiennych: $u = V^{-1/2}$. Rozwiązanie jest następujące:

$$V(t) = 4e^{-\frac{1}{2} \int f(t) dt} \left[\int g(t) e^{-\frac{1}{2} \int f(s) ds} dt \right]^{-2}. \quad (2.51)$$

Odpowiednie całki z funkcji f i g są równe:

$$\int f(t) dt = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \dot{T}^2 \right) + C,$$

$$\int g(t) e^{-\frac{1}{2} \int f(s) ds} dt = \frac{\sqrt{3}}{m_{Pl}} e^{-C/2} \int \dot{T}^2 dt.$$

W ten sposób otrzymujemy potencjał jako funkcję czasu:

$$V(t) = \frac{4m_{Pl}^2}{3} \frac{\sqrt{1 - \dot{T}^2}}{\left[\int \dot{T}^2 dt \right]^2}. \quad (2.52)$$

Parametr Hubble H jest otrzymany z (2.48):

$$H = \frac{2}{3} \left[\int \dot{T}^2 dt \right]^{-1}. \quad (2.53)$$

W przypadku, kiedy \dot{T} jest zadane funkcją T :

$$\dot{T} = h(T),$$

to z równania (2.52) otrzymamy potencjał V w następującej formie:

$$V(T) = \frac{4m_{Pl}^2}{3} \frac{\sqrt{1 - h^2(T)}}{\left[\int h(T') dT' \right]^2}. \quad (2.54)$$

W [64] było zrobione założenie dla możliwej formy późno-czasowej ewolucji tachionu w następującej postaci:

$$\dot{T} = \tanh(bt). \quad (2.55)$$

Potencjał jako funkcja czasu jest otrzymany z (2.52) i ma postać:

$$V(t) = \frac{\lambda}{\cosh(bt)} \left[1 + \frac{\sqrt{3\lambda}}{2bm_{Pl}} (bt - \tanh(bt)) \right]^{-2}, \quad (2.56)$$

z warunkiem początkowym: $V(0) = \lambda$. Równanie (2.55) można zapisać jako:

$$\dot{T} = \sqrt{1 - \exp(-2bT)}, \quad (2.57)$$

ponieważ $T(t) = \frac{1}{b} \ln(\cosh(bt))$ jest rozwiązaniem (2.55). Ostatecznie potencjał V jest równy:

$$V(T) = \lambda e^{-bT} \left[\frac{\sqrt{3\lambda}}{2m_{Pl}b} \left(-\sqrt{1 - \exp(-2bT)} + \ln \left(e^{bT} + \sqrt{e^{2bT} - 1} \right) \right) + 1 \right]^{-2}. \quad (2.58)$$

Mając wiedzę o ewolucji tachionu możemy znaleźć formę potencjału, korzystając z równania (2.52) bądź z równania (2.54).

3 Światy D-branowe

Rozwiązania próżniowe na poziomie klasycznym (próżnie) teorii superstrun zawierają Dp -brany. Są to podrozmaitości zanurzone w 10 - wymiarowej czasoprzestrzeni, do których są przymocowane końce strun otwartych. Dopuszczalne wymiary przestrzenne tych podrozmaitości zależą od rozpatrywanych typów teorii superstruny. Dla typu IIA są to wymiary parzyste ($p = 0, 2, 4, 6, 8$) a dla typu IIB nieparzyste ($p = -1, 1, 3, 5, 7$) gdzie p to wymiar przestrzenny oraz $p = -1$ odpowiada instantonowi. Obiekty te zostały odkryte poprzez T-dualności. Jest to definicja czysto klasyczna bez uwzględnienia efektów kwantowych. Na takich obiektach można zlokalizować pola Modelu Standardowego (MS). Natomiast oddziaływanie grawitacyjne propaguje się w 10-wymiarowej czasoprzestrzeni. W ten sposób otrzymujemy obiekt (układ N Dp -bran razem z polami cechowania MS), który może być modelem świata. Działanie dla układu Dp -brany oraz grawitacji jest dane poprzez jedno z niskoenergetycznych przybliżeń działań dla superstrun (zależy od rozpatrywanej teorii superstruny). Jednakże z faktu, że wszystkie teorie superstrun są związane w sieć dualności, fizyka układu pozostaje niezależna od wybranej teorii. Niskoenergetyczne działanie dla jednej Dp -brany jest zadane przez działania Diraca-Borna-Infelda (DBI). Następnie można rozważać kosmologiczną ewolucję takiego układu, z punktu widzenia obserwatora będącego na wybranej Dp -branie. Jeżeli założy się, że powyższy model opisuje obserwowany świat, to należy przyjąć $p = 3$. Tak, więc $D3$ -brana jest zanurzona w 10-wymiarowej czasoprzestrzeni wypełnionej innymi Dk -branami, które z nią oddziałują.

3.1 Stała kosmologiczna i D3-brana

W [65] została otrzymana przez mnie stała kosmologiczna na D3-branie, która jest indukowana przez tensor energii-pędu dla układu p -bran wypełniających 10-wymiarową czasoprzestrzeń. W zależności od wymiaru p -bran oraz ich charakteru, tzn. czy są to rozwiązania posiadające osobliwości (czarne p -brany) czy nie, stała kosmologiczna jest sumą poszczególnych wkładów od tych p -bran. Został tam również rozpatrzony dynamiczny przypadek gdy D3-brana jest w ruchu względem tła. Wtedy tensor energii-pędu na objętości świata D3-brany jest interpretowany jako tensor energii-pędu dla egzotycznej cieczy doskonałej z równaniem stanu zależnym od wymiarów p -bran oraz ich charakteru rozwiązań. Ciśnienie dla tej cieczy doskonałej jest ujemne, co powoduje działanie przeciw przyciągającym siłą grawitacji.

Model, który był rozpatrywany w [65], składa się z działania dla dylatonu ϕ , grawitonu g_{MN} i antysymetrycznego tensora $A_{M_1\dots M_d}$ rzędu $d = p + 1$ w D wymiarowej czasoprzestrzeni R^D . Pola te sprzęgają się z rozciągniętym p -wymiarowym obiektem (braną) M . Forma działania dla pól ϕ , g_{MN} i $A_{M_1\dots M_d}$ ma postać [66]:

$$I_D(d) = 1/2\kappa^2 \int_{R^D} d^D x \sqrt{-g} (R(g) - 1/2 |d\phi|^2 - \frac{1}{2(d+1)!} e^{-\phi a(d)} F^2). \quad (3.1)$$

Na rozmaitości M istnieje metryka $\gamma_{\mu\nu}$ oraz M jest zanurzane poprzez pole X w R^D :

$$X : M \rightarrow R^D.$$

Natomiast działanie S_d dla brany M jest dane przez formułę:

$$S_d = T_d \int_{M \times \mathbf{R}} d^d \xi \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-\gamma} \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu X^M \partial_\nu X^N g_{MN} e^{a\phi/d} + \frac{d-2}{2} \sqrt{-\gamma} - \frac{1}{d!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_d} \partial_{\mu_1} X^{M_1} \dots \partial_{\mu_d} X^{M_d} A_{M_1 \dots M_d} \right], \quad (3.2)$$

gdzie $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d-1$. Tak więc działanie $I(D, d)$ dla całego systemu składa się z sumy działań (3.1) i (3.2):

$$I(D, d) = I_D(d) + S_d. \quad (3.3)$$

W działaniu (3.3) jest pięć niezależnych pól:

1. pole $A_{M_1\dots M_d}$,
2. metryka g_{MN} na R^D ,
3. dylaton ϕ ,
4. wektorowe pole X zanurzenia brany M w R^D ,

5. metryka $\gamma_{\mu\nu}$ na M .

Równania ruchu względem tych pól są następujące:

- Równania Maxwella $\frac{\delta I(D,d)}{\delta A} = 0$:

$$d * (e^{-a\phi} F) = 2\kappa^2 * J, \quad (3.4)$$

gdzie prąd J jest zadany przez związek:

$$J^{M_1 \dots M_d}(x) = T_d \int_{M \times \mathbf{R}} d^d \xi \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_d} \partial_{\mu_1} X^{M_1} \dots \partial_{\mu_d} X^{M_d} \chi, \quad (3.5)$$

oraz $\chi = \delta^D(x - X(\xi)) / \sqrt{-g}$

- Równania Einsteina $\frac{\delta I(D,d)}{\delta g} = 0$:

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = \frac{1}{2} \left(\partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{2} g_{MN} |d\phi|^2 \right) + \kappa^2 T_{MN} + \frac{e^{-a\phi}}{2d!} \left(F_M^{M_1 \dots M_d} F_{NM_1 \dots M_d} - \frac{1}{2(d+1)} g_{MN} F^2 \right), \quad (3.6)$$

gdzie $T_{MN} = g_{MAGNB} T^{AB}$ tensor energii-pędu dla brany M :

$$T^{AB}(x) = T_d \int_{M \times \mathbf{R}} d^d \xi \sqrt{-\gamma} \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu X^A \partial_\nu X^B e^{a\phi/d} \chi, \quad (3.7)$$

- Równanie dylatonu $\frac{\delta I(D,d)}{\delta \phi} = 0$:

$$\begin{aligned} & \partial_M (\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \phi) + \frac{a\sqrt{-g}}{2(d+1)} e^{-a\phi} F^2 = \\ & = -\kappa^2 \frac{a}{d} T_d \int_M d^d \xi \sqrt{-\gamma} \gamma^{ij} \partial_i X^M \partial_j X^N g_{MN} e^{a\phi/d} \chi \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

- Równanie brany $\frac{\delta I(D,d)}{\delta X} = 0$:

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left(\sqrt{-\gamma} \gamma^{\mu\nu} \partial_\nu X^N g_{MN} e^{a\phi/d} \right) + \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{-\gamma} \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu X^N \partial_\nu X^P \partial_M \left(g_{NP} e^{a\phi/d} \right) = \\ & \frac{1}{d!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_d} \partial_{\mu_1} X^{M_1} \dots \partial_{\mu_d} X^{M_d} F_{MM_1 \dots M_d}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

- Równanie dla metryki γ w objętości-świata $\frac{\delta I(D,d)}{\delta \gamma} = 0$:

$$\gamma_{\mu\nu} = \partial_\mu X^M \partial_\nu X^N g_{MN} e^{a\phi/d}. \quad (3.10)$$

Ażeby rozwiązać powyższy układ równań (3.4-3.10), zakłada się, że R^D ma topologię iloczynu Kartezjańskiego (np. [66]):

$$R^D = M \times N, \quad (3.11)$$

gdzie M jest d -wymiarową rozmaitością ($(d-1)$ -braną) z grupą symetrii Poincarè $P(d)$ a N jest rozmaitością z grupą symetrii $SO(D-d)$. W lokalnym układzie współrzędnych na R^D wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$X^M = (x^\mu, y^m),$$

gdzie x^μ, y^m odnoszą się, odpowiednio do M i N . Indeksy μ oraz m mają wartości: $\mu = 0, 1, \dots, d-1$; $m = 1, \dots, D-d$. Dla takiej topologii zakłada się następujący ansatz dla metryki g_{MN} :

$$ds^2 = g_{MN} dx^M dx^N = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2B(y)} \delta_{mn} dy^m dy^n, \quad (3.12)$$

metryka η jest diagonalna: $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(+1, -1, \dots, -1)$. Funkcje A i B zależą tylko od odległości $y = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})^{1/2}$. Antysymetryczne pole A ma formę [66]:

$$A_{\mu_1 \dots \mu_d} = -\frac{1}{\det(g_{\mu\nu})} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} e^{C(y)}, \quad (3.13)$$

gdzie:

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} = g_{\mu_1 \nu_1} \dots g_{\mu_d \nu_d} \varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_d},$$

($\varepsilon^{01 \dots d-1} = +1$) inne składowe pola A znikają, $\det(g_{\mu\nu}) = (-1)^{d-1} e^{2Ad}$. Więc pole $F = dA$ ma postać:

$$F_{m\mu_1 \dots \mu_d} = -\frac{1}{\det(g_{\mu\nu})} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} \partial_m (e^{C(y)}). \quad (3.14)$$

Pole dylatonu ϕ zależy tylko od y , ponieważ N jest sferycznie symetryczna:

$$\phi = \phi(y).$$

Zakłada się również, że pole X jest postaci:

$$X^M = (\xi^\mu, Y^m),$$

gdzie ξ^μ są współrzędnymi na branie M . Kierunki poprzeczne od M są oznaczone przez Y oraz zakłada się, że $Y^m = \text{const}$. Przy tych założeniach metryka γ jest następująca:

$$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} e^{2A+a\phi/d}.$$

Rozwiązania powyższego układu równań spełniającego płaskie asymptotyczne warunki ($g_{MN} \rightarrow \eta_{MN}$) jest zadawane przez jedną funkcję $C(y)$ [66]:

$$A(y) = \frac{\tilde{d}}{2(d+\tilde{d})} (C(y) - C_0), \quad (3.15)$$

$$B(y) = -\frac{d}{2(d+\tilde{d})} (C(y) - C_0), \quad (3.16)$$

$$e^{-C(y)} = \begin{cases} e^{-C_0 + \frac{k_d}{y^{\tilde{d}}}} & \text{for } \tilde{d} > 0 \\ e^{-C_0 + \frac{\kappa^2 T_d}{\pi} \ln y} & \text{for } \tilde{d} = 0 \end{cases}, \quad (3.17)$$

$$\frac{a}{d}\phi(y) = \frac{a^2}{4} (C(y) - C_0) + C_0, \quad (3.18)$$

$$a^2(d) = 4 - \frac{2\tilde{d}d}{d+\tilde{d}}, \quad (3.19)$$

gdzie:

$$k_d = \frac{2\kappa^2 T_d}{\Omega_{\tilde{d}+1} \tilde{d}} \quad (3.20)$$

oraz $\tilde{d} = D - d - 2$, $\Omega_{\tilde{d}+1}$ jest objętością jednostkowej $(\tilde{d} + 1)$ -wymiarowej sfery $S^{\tilde{d}+1}$. Jawna postać metryki g_{MN} jest następująca:

$$g_{MN} dX^M dX^N = \left(1 + \frac{k_d}{y^{\tilde{d}}} e^{-C_0}\right)^{-\frac{\tilde{d}}{d+\tilde{d}}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \left(1 + \frac{k_d}{y^{\tilde{d}}} e^{-C_0}\right)^{\frac{d}{d+\tilde{d}}} \delta_{mn} dy^m dy^n. \quad (3.21)$$

Innym rozwiązaniem tego układu równań jest $(d + 2)$ -wymiarowy obiekt posiadający horyzonty i osobliwości tensora krzywizny w $y = 0$ tzw. czarna-brana (black-brane) z grupą symetrii:

$$\mathbf{R} \times SO(d+1) \times SO(\tilde{d}-1).$$

Metryka tła dla takich rozwiązań jest postaci:

$$ds^2 = -\Delta_+ \Delta_-^{-\frac{\tilde{d}}{d+\tilde{d}}} dt^2 + \Delta_+^{-1} \Delta_-^{\frac{2}{d+\tilde{d}}-1} dr^2 + r^2 \Delta_-^{\frac{2}{d+\tilde{d}}} d\Omega_{d+1}^2 + \Delta_-^{\frac{d}{d+\tilde{d}}} dX_i dX^i, \quad (3.22)$$

gdzie $i = 1, \dots, \tilde{d} - 1$ oraz:

$$e^{-2\phi} = \Delta_-^a, \quad (3.23)$$

$$\Delta_\pm = 1 - \left(\frac{r_\pm}{r}\right)^d, \quad (3.24)$$

$$F_{d+1} = (r_+ r_-)^{d/2} \varepsilon_{d+1} d, \quad (3.25)$$

ε_{d+1} jest formą objętości $(d+1)$ -wymiarowej sfery S^{d+1} z metryką $d\Omega_{d+1}^2 = h_{ab}d\varphi^a d\varphi^b$. Promienie r_+ i r_- są związane z masą $m_{\tilde{d}}$ na jednostkę $(\tilde{d}-1)$ -objętości oraz z ładunkiem magnetycznym $g_{\tilde{d}}$:

$$m_{\tilde{d}} = \int d^{D-d}\Theta_{00} = \frac{\Omega_{d+1}}{2\kappa^2}[(d+1)r_+^d - r_-^d], \quad (3.26)$$

$$g_{\tilde{d}} = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa} \int_{S^{d+1}} e^{-a\phi} * F = \frac{\Omega_{d+1}}{\sqrt{2}\kappa} d(r_+r_-)^{d/2}, \quad (3.27)$$

gdzie Θ_{MN} jest całkowitym tensorem energii-pędu dla układu, $*$ jest operatorem dualności (gwiazdką) Hodge'a ze względu na metrykę (3.22). W przypadku, kiedy $r_+ = r_- = r_0$, masa i ładunek są związane w następujący sposób:

$$m_{\tilde{d}} = \sqrt{2}\kappa g_{\tilde{d}}. \quad (3.28)$$

Oznacza to, że brana staje się ekstremalną p-braną (stanem BPS). Metryka (3.22) dla takiego przypadku przyjmuje postać:

$$ds^2 = \Delta^{\frac{d}{d+\tilde{d}}} (-dt^2 + dX_i dX^i) + \Delta^{-\frac{\tilde{d}}{d+\tilde{d}}} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{d+1}^2), \quad (3.29)$$

gdzie $\rho^d = r^d - r_0^d$ oraz $\Delta = 1 + (r_0/\rho)^d$.

W pracy [65] mamy $(d'-1)$ -branę M zanurzoną w D -wymiarowej czasoprzestrzeni R^D w której znajdują się $(d+2)$ -wymiarowe brany z horyzontem i osobliwościami tensora krzywizny (black-brane), obwijające $(d+1)$ -wymiarowe sfery oraz brany BPS z symetrią grupy Poincarè. Metryka tła, gdy brany owijają sfery, jest dana w ogólnej formie przez:

$$ds^2 = \lambda_0 dt^2 + \lambda_1 \sum_{i=1}^{\tilde{d}-1} dX_i^2 + \lambda_2 dr^2 + r^2 \lambda_3 d\Omega_{d+1}^2 \quad (3.30)$$

(jest to inna postać równania (3.22)). Więc metryka $\gamma_{\alpha\beta}$ na M , która jest indukowana przez g_{MN} i pole zanurzenia X :

$$X^M(\xi^0, \xi^a) = (\xi^0, \xi^a, X^m(\xi^0)), \quad (3.31)$$

jest następującej postaci:

$$\gamma_{00} = \lambda_0 + \lambda_1 \sum_{i=d'}^{\tilde{d}-1} X_i^2 + \lambda_2 r^2 + r^2 \lambda_3 \dot{\varphi}^2, \quad (3.32)$$

$$\gamma_{ab} = \lambda_1 \delta_{ab}, \text{ dla } d' - 1 \leq \tilde{d} - 1, \gamma_{a0} = 0, \quad (3.33)$$

$\dot{\varphi}^2 = h_{rs} \dot{\varphi}^r \dot{\varphi}^s$ gdzie $h_{rs} = h_{rs}(\varphi)$ ($r, s = 1, \dots, d+1$) jest metryką na S^{d+1} . Metrykę tła, odpowiadającą branom BPS z symetrią Poincarè (metryka (3.21)), można zapisać jako:

$$ds^2 = \lambda_0 dt^2 + \lambda_1 \sum_{i=1}^{\tilde{d}-1} dX_i^2 + \lambda_2 \sum_{m=1}^{d+2} dX_m^2, \quad (3.34)$$

więc indukowana metryka γ przy zanurzeniu (3.31) dla $d' - 1 \leq \tilde{d} - 1$ ma postać:

$$\gamma_{00} = \lambda_0 + \lambda_1 \sum_{i=d'}^{\tilde{d}-1} X_i + \lambda_2 \sum_{m=1}^{d+2} X_m, \quad \gamma_{0a} = 0, \quad \gamma_{ab} = \lambda_1 \delta_{ab}. \quad (3.35)$$

Gdy $d' - 1 \geq \tilde{d} - 1$ metryka γ jest dana przez:

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= \lambda_0 + \lambda_2 \sum_{m=1}^{d+2} X_m, \\ \gamma_{a_1 b_1} &= \lambda_1 \delta_{a_1 b_1} \text{ for } a_1, b_1 = 1, \dots, \tilde{d} - 1, \\ \gamma_{a_2 b_2} &= \lambda_2 \delta_{a_2 b_2} \text{ for } a_2, b_2 = \tilde{d}, \dots, d' - 1. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Tensor energii-pędu dla $(d' - 1)$ -brany M jest zadany równaniem (3.7) i wyraża się przez macierz:

$$(T^{MN}) = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{0a} & T^{0m} \\ T^{a0} & T^{ab} & T^{am} \\ T^{m0} & T^{ma} & T^{mn} \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

gdzie $a, b = 1, \dots, d' - 1$ oraz $m, n = 1, \dots, D - d'$. Typowa forma metryki tła g_{MN} wytwarzanego przez $(d - 1)$ -brany jest zadana przez związek (równanie (3.30) i równanie (3.34)):

$$(g_{MN}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 & (0) \\ (0) & \lambda_1 I_{\tilde{d}-1} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (g_{rs}) \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

gdzie $I_{\tilde{d}-1}$ jest $(\tilde{d} - 1)$ -wymiarową macierzą jednostkową i $r, s = 1, \dots, d + 2$. Składowe tensora energii-pędu T^{MN} dla metryki (3.38) i dla pola X danego przez (3.31) mają postać:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= T_d \sqrt{\frac{\gamma}{g}} \gamma^{\mu\nu} e^{a\phi/d} \widehat{\delta}, \\ T^{m0} &= T^{0m} = T_d \sqrt{\frac{\gamma}{g}} \gamma^{00} \dot{X}^m e^{a\phi/d} \widehat{\delta}, \\ T^{mn} &= T_d \sqrt{\frac{\gamma}{g}} \gamma^{00} \dot{X}^m \dot{X}^n e^{a\phi/d} \widehat{\delta}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

gdzie $\widehat{\delta} = \delta^{D-d} (x^m - X^m(\xi^0))$. Inne składowe (T^{a0} , T^{am}) są równe zeru oraz $\gamma = \det(\gamma_{\mu\nu})$, $g = \det(g_{MN})$. Iloraz wyznaczników γ/g dla metryki tła (3.30) jest równy:

$$\gamma/g = \frac{\lambda_1^{d'-\tilde{d}} \Gamma}{r^{2(d+1)} \lambda_2 \lambda_3^{d+1} \det h}, \quad (3.40)$$

gdzie:

$$\Gamma = 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \sum_{i=d'}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \dot{r}^2 + r^2 \frac{\lambda_3}{\lambda_0} \dot{\varphi}^2. \quad (3.41)$$

Postać tensora energii-pędu T^{MN} dla d' -brany M jest następująca:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{T_{d'}}{r^{d+1}} \sqrt{\frac{\lambda_1^{d'-\tilde{d}} \Gamma}{\lambda_2 \lambda_3^{d+1} \det h}} \gamma^{\mu\nu} e^{a\phi/d} \widehat{\delta}, \\ T^{m0} &= \frac{T_{d'}}{r^{d+1}} \sqrt{\frac{\lambda_1^{d'-\tilde{d}} \Gamma}{\lambda_2 \lambda_3^{d+1} \det h}} \frac{\dot{X}^m}{\lambda_0 \Gamma} e^{a\phi/d} \widehat{\delta}, \\ T^{mn} &= \frac{T_{d'}}{r^{d+1}} \sqrt{\frac{\lambda_1^{d'-\tilde{d}} \Gamma}{\lambda_2 \lambda_3^{d+1} \det h}} \frac{\dot{X}^m \dot{X}^n}{\lambda_0 \Gamma} e^{a\phi/d} \widehat{\delta}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

ponieważ $\gamma_{00} = \lambda_0 \Gamma$ oraz $\gamma^{00} = (\lambda_0 \Gamma)^{-1}$. Tensor ten ma swój wkład do tensora energii-pędu $\tilde{T}_{\mu\nu}$ na branie M poprzez pole X :

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T^{AB} g_{AM} g_{BN} \frac{\partial X^M}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial X^N}{\partial \xi^\nu}. \quad (3.43)$$

Tak, więc otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{00} &= T^{00} g_{00}^2 + T^{m_1 n_1} g_{m_1 m} g_{n_1 n} \dot{X}^m \dot{X}^n \\ \tilde{T}_{ab} &= T^{cd} g_{ca} g_{bd}, \quad \tilde{T}_{0a} = 0, \end{aligned}$$

gdzie $g_{00} = \lambda_0$, $(g_{ac}) = \lambda_1 I_{d'-1}$ oraz:

$$(g_{m_1 m}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\tilde{d}-d'} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \lambda_3 (h_{ps}) \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $g_{mn} \dot{X}^m \dot{X}^n = \lambda_0 (\Gamma - 1)$, więc:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{00} &= \frac{T_{d'}}{r^{d+1}} \sqrt{\frac{\lambda_1^{d'-\tilde{d}}}{\lambda_2 \lambda_3^{d+1} \Gamma \det h}} e^{a\phi/d} \lambda_0 [\Gamma^2 - 2\Gamma + 2], \\ \tilde{T}_{ab} &= \frac{T_{d'}}{r^{d+1}} \sqrt{\frac{\lambda_1^{d'-\tilde{d}} \Gamma}{\lambda_2 \lambda_3^{d+1} \det h}} e^{a\phi/d} \lambda_1 \delta_{ab}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

modulo funkcje delta. W statycznym przypadku ($\dot{X}^m = 0$) $\Gamma = 1$, tensor $\tilde{T}_{\mu\nu}$ przyjmuje postać:

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{T_{d'}}{r^{d+1}} \sqrt{\frac{\lambda_1^{d'-\tilde{d}}}{\lambda_2 \lambda_3^{d+1} \det h}} e^{a\phi/d} \gamma_{\mu\nu}. \quad (3.45)$$

Składa się on z części

$$\Lambda_b(r; d', d) = \frac{T_{d'}}{r^{d+1}} \sqrt{\frac{\lambda_1^{d'-\tilde{d}}}{\lambda_2 \lambda_3^{d+1} \det h}} e^{a\phi/d}, \quad (3.46)$$

która zależy tylko od współrzędnej r poprzecznej do brany M . Dla ustalonej pozycji M w czasoprzestrzeni R^D wielkość Λ_b ma stałą wartość. Równania grawitacji na M mają postać:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R = t_{\mu\nu} + \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (3.47)$$

gdzie $R_{\mu\nu}$ jest tensorem Ricciego, R jest skalarom krzywizny dla metryki $\gamma_{\mu\nu}$ oraz $t_{\mu\nu}$ jest tensorem energii-pędu dla pól znajdujących się na branie M . Ponieważ $\tilde{T}_{\mu\nu}$ jest iloczynem Λ_b i metryki $\gamma_{\mu\nu}$, więc równanie (3.47) jest następującej formy :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R = t_{\mu\nu} + \Lambda_b \gamma_{\mu\nu}.$$

Tak, więc Λ_b może być zidentyfikowana jako stała kosmologiczna. Dla metryki (3.22) otrzymujemy:

$$\Lambda_b(r; d', d) = \frac{T_{d'}}{r^{2(d+1)}} \sqrt{\frac{1}{\det h}} \left(1 - \frac{r_+^d}{r^d}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{r_-^d}{r^d}\right)^\sigma, \quad (3.48)$$

gdzie:

$$\sigma(d', d; D) = \frac{\tilde{d}(3-d) + d'd}{2(D-2)} - \frac{3}{d} + \frac{1}{2}. \quad (3.49)$$

Wymiar bran d , które owijają sfery, może zmieniać się od 0 do $D-1$, więc wyraz Λ_b będzie sumą wkładów pochodzących od różnych bran:

$$\Lambda_b(r_1, \dots, r_{D-1}; d') = \sum_{d=1}^{D-1} \Lambda_b(r_d; d', d), \quad (3.50)$$

gdzie r_d jest odległością od $(d-1)$ -brany do $(d'-1)$ -brany M .

W przypadku, kiedy $D = 10$, odpowiada to teorii superstrun, oraz $d' = 4$ wykładnik σ ma wartość:

$$\sigma(4, d; 10) = 2 - \frac{3}{d} + \frac{1}{16}(d-7)d. \quad (3.51)$$

Tak więc

$$\Lambda_b(r; 4, d) = \frac{T_4}{r^{2(d+1)}} \sqrt{\frac{1}{\det h}} \left(1 - \frac{r_+^d}{r^d}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{r_-^d}{r^d}\right)^{2 - \frac{3}{d} + \frac{1}{16}(d-7)d} \quad (3.52)$$

oraz stała kosmologiczna jest równa:

$$\Lambda_b(r_1, \dots, r_9; 4) = \sum_{d=1}^9 \Lambda_b(r_d; 4, d). \quad (3.53)$$

Dopuszczalne wymiary pojawiające się w powyższej sumie zależą od rozpatrywanej teorii: dla teorii Typu IIA $p = d - 1$ jest parzyste natomiast dla Typu IIB $p = d - 1$ jest nieparzyste.

W przypadku dynamicznym ($\Gamma \neq 1$) wprowadzimy pole skalarne ϕ (nie jest to dylaton) w następującej postaci:

$$\phi^2 = \frac{\lambda_1}{|\lambda_0|} \sum_{i=d'}^{\tilde{d}-1} X_i^2 + \frac{\lambda_2}{|\lambda_0|} r^2 + r^2 \frac{\lambda_3}{|\lambda_0|} \dot{\phi}^2. \quad (3.54)$$

Ponieważ λ_0 jest ujemne łatwo zauważyć, że zachodzi związek:

$$\Gamma = 1 - \phi^2. \quad (3.55)$$

Tensor energii-pędu wyraża się przez pole skalarne ϕ w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{00} &= \Lambda_b \frac{1 + \phi^4}{\sqrt{1 - \phi^2}} \gamma_{00}, \\ \tilde{T}_{ab} &= \Lambda_b \sqrt{1 - \phi^2} \gamma_{ab}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

gdzie Λ_b jest dane przez (3.52) dla $d' = 4$. Mając tak otrzymane wyrażenie na $\tilde{T}_{\mu\nu}$, porównamy je z tensorem energii-pędu $T_{\mu\nu}$ dla cieczy doskonałej, która ma gęstość energii ε oraz ciśnienie p :

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p) u_\mu u_\nu - p \gamma_{\mu\nu}. \quad (3.57)$$

W układzie współporuszającym się ($u_a = 0$) otrzymamy związki:

$$\varepsilon = \Lambda_b \frac{1 + \phi^4}{\sqrt{1 - \phi^2}}, \quad (3.58)$$

$$p = -\Lambda_b \sqrt{1 - \phi^2}, \quad (3.59)$$

oraz równanie stanu dla tej cieczy:

$$w = p/\varepsilon = -\frac{1 - \phi^2}{1 + \phi^4}. \quad (3.60)$$

Dla różnych bran otrzymamy różne pola ϕ_d , więc efektywna gęstość energii i ciśnienie mają postać:

$$\varepsilon = \sum_{d=1}^9 \Lambda_b(r_d; 4, d) \frac{1 + \phi_d^4}{\sqrt{1 - \phi_d^2}}, \quad (3.61)$$

$$p = -\sum_{d=1}^9 \Lambda_b(r_d; 4, d) \sqrt{1 - \phi_d^2}, \quad (3.62)$$

oraz równanie stanu:

$$w = -\frac{\sum_{d=1}^9 \Lambda_b(r_d; 4, d) \sqrt{1 - \phi_d^2}}{\sum_{d=1}^9 \Lambda_b(r_d; 4, d) \frac{1 + \phi_d^4}{\sqrt{1 - \phi_d^2}}}. \quad (3.63)$$

Dla pewnych wartości pól ϕ_d równanie stanu przyjmie postać $w \leq -1/3$, które odpowiada interpretacji egzotycznej materii w objętości świata brany M .

W ten sposób otrzymaliśmy rodzinę możliwych równań stanów dla cieczy doskonałych z ujemnym ciśnieniem, które mogą służyć jako dobrze wyprowadzone modele odpowiadające egzotycznej materii. Z drugiej strony istnieją modele, które obarczają za coraz szybszą ekspansję tzw. ciemną energię, która jest związana z istnieniem stałej kosmologicznej. Tutaj również otrzymaliśmy taką stałą kosmologiczną. Problem, który z tych modeli opisuje rzeczywistość, czy stała kosmologiczna czy egzotyczna materia, jest jak do tej pory nierozstrzygnięty. W [65] zostały ujęte te dwie alternatywy, jako przypadek statyczny (3-brana jest statyczna względem tła produkowanego przez p -brany) odpowiadający stałej kosmologicznej oraz przypadek dynamiczny, który odpowiada egzotycznej materii na objętości świata 3-brany.

3.2 Ewolucja D3-brany

D3-brana jest trójwymiarową podrozmaiutością, gdzie końce struny otwartej są zaczeplone. Jednakże zgodnie z jedną obserwacją z [27] można uważać Dp -brany jako p -wymiarowy horyzont zdarzeń dla struny zamkniętej. Jedna część struny zamkniętej jest widoczna jako struna otwarta, której końce są zaczeplone na branie, natomiast druga część jest pod horyzontem. W [67] zostały zbadane, przeze mnie konsekwencje takiej interpretacji D3-brany. Okazało się, że dynamiczna ewolucja objętości-świata ma wiele scenariuszy. Jednym z nich jest czasoprzestrzeń de Sittera.

Taka ewolucja jest indukowana przez zdeformowaną metrykę wiążącą się ze znikaniem Lagrażianu Diraca-Borna-Infelda (DBI). Bozonowa część działania DBI jest niezmiennicza względem dyfeomorfizmów, więc Hamiltonian jest sumą więzów. Rozpatrujemy dynamiczne pole zanurzenia D3-brany, oznacza to, że zarówno poprzeczne współrzędne do brany jak i pola cechowania zależą od czasu. Nakładając więz na poprzeczne prędkości otrzymujemy ewolucję samej D3-brany oraz otaczającej przestrzeni. Nisko-energetyczne działanie w płaskiej 10-wymiarowej czasoprzestrzeni dla Dp -brany jest dane przez wyrażenie:

$$S = -T_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} e^{-\phi} \left(-\det(\gamma_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}) \right)^{1/2} d^{p+1}\xi + T_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} \sum_i C_i \wedge \exp(2\pi\alpha' F + B), \quad (3.64)$$

gdzie: ϕ jest polem dylatomu, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, p$ i p jest przestrzennym wymiarem Dp -brany. Metryka $\gamma_{\alpha\beta}$ w objętości-świata brany jest indukowana przez metrykę

tła g_{MN} :

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{MN}\partial_\alpha X^M\partial_\beta X^N,$$

X^M jest polem zanurzenia \mathcal{M}_{p+1} w otaczającą czasoprzestrzeń:

$$X^M = (X^\alpha, X^a),$$

$a = 1, \dots, 9 - p$. Pola pochodzące z sektora RR są oznaczone jako C_i , $F_{\alpha\beta}$ jest natężeniem dla abelowego pola cechowania A_α na Dp-branie, $B_{\alpha\beta}$ jest cofnięciem (pullback) 2-formy tła B z sektora NS.

W dalszym ciągu naszych rozważań zajmujemy się metryką i polem cechowania A na branie. W tym przypadku część działania związana z wyrazem WZ (drugi wyraz po prawej stronie (3.64)) znika. Wbieramy przestrzenny wymiar brany równy trzy ($p = 3$). Tak więc działanie (3.64) redukuje się do postaci:

$$S = -T_3 \int_{\mathcal{M}_4} d^4\xi e^{-\phi} \sqrt{-\left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\gamma}\gamma^{\beta\delta}\mathcal{F}_{\alpha\delta}\mathcal{F}_{\beta\gamma}\right) \det \gamma - Pff^2(\mathcal{F})}, \quad (3.65)$$

gdzie $\mathcal{F}_{\alpha\beta} = 2\pi\alpha'F_{\alpha\beta}$ oraz $Pff^2(\mathcal{F}) = \det(\mathcal{F})$. Lagranżian w równaniu Eq.(6.65) wyraża się przez pole elektryczne $E_m = -F_{0m}$ i pole magnetyczne $B_m = \frac{1}{2}\varepsilon_{mnp}F^{np}$ w następujący sposób:

$$L = T_3 e^{-\phi} \sqrt{-\left(1 + (2\pi\alpha')^2 \gamma^{00}\mathbf{E}^2 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2\right) \det \gamma - (2\pi\alpha')^4 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2},$$

gdzie $\mathbf{E}^2 = \gamma^{mn}E_mE_n$ oraz $\mathbf{B}^2 = \gamma^{mn}B_mB_n$. Przeskalowaliśmy T_3 przez pole dylatonu ϕ w następujący sposób:

$$T_3 e^{-\phi} \rightarrow T_3.$$

W tym zabiegu jest ukryte założenie, że ϕ jest stałe na objętości świata D3-brany. Można zauważyć, że powyższy Lagranżian można zapisać w takiej postaci:

$$L = T_3 \sqrt{-\left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2\right) \det \gamma - \mathbf{E}^T M \mathbf{E}}, \quad (3.66)$$

gdzie macierz M jest zadana przez swoje składowe:

$$M^{mn} = (2\pi\alpha')^2 \gamma^{00}\gamma^{mn} \det \gamma + (2\pi\alpha')^4 B^m B^n \quad (3.67)$$

oraz $B^m = \gamma^{mn}B_n$.

Pary kanonicznych współrzędnych do pól X i A są oznaczone jako:

$$(X^M, P_M), (\Pi^\alpha, A_\alpha),$$

i pędy kanonicznie sprzężone wyrażają się w następujący sposób:

$$P_M = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 X^M)} = -\frac{T_3}{2} \sqrt{-\det(\gamma + \mathcal{F})} (G^{\alpha 0} + G^{0\alpha}) \partial_\alpha X^N g_{MN}, \quad (3.68)$$

$$\Pi^m = \frac{\partial L}{\partial (\partial_0 A_m)} = -\frac{2\pi\alpha'T_3}{2} \sqrt{-\det(\gamma + \mathcal{F})} (G^{m0} - G^{0m}), \quad (3.69)$$

$$\Pi^0 = \frac{\partial L}{\partial (\dot{A}_0)} = 0, \quad (3.70)$$

gdzie:

$$G^{\alpha\beta} = (G^{-1})^{\alpha\beta} = [(\gamma + \mathcal{F})^{-1}]^{\alpha\beta}.$$

Wprowadzamy następujące macierze \mathcal{P} i \mathcal{E} :

$$\mathcal{P}_M = (\mathcal{P}_M^\alpha) = G^{-T} e_M + G^{-1} e_M, \quad \mathcal{E} = (\mathcal{E}^{\alpha\beta}) = G^{-1} - G^{-T}, \quad (3.71)$$

gdzie: $e_M = g_{MN} e^N$, $e^N = (e_\alpha^N) = (\partial_\alpha X^N)$. Między tymi macierzami zachodzi relacja:

$$\mathcal{P}_M e^M + \mathcal{E} \mathcal{F} = 2I.$$

Dla współrzędnych na D3-branie dostajemy związek:

$$\mathcal{P}_M^\alpha e_\beta^M + \mathcal{E}^{\alpha\gamma} \mathcal{F}_{\gamma\beta} = 2\delta_\beta^\alpha. \quad (3.72)$$

Kwadrat \mathcal{P}_M jest równy:

$$g^{MN} \mathcal{P}_M \mathcal{P}_N = \mathcal{E} \gamma \mathcal{E} + 4G^{-1} + 2(G^{-1} \mathcal{F} G^{-T} + G^{-T} \mathcal{F} G^{-1}). \quad (3.73)$$

Ze związku (3.72) dla $\alpha = 0$ i $\beta = 0$ otrzymujemy tożsamości:

$$2\pi\alpha' P_M e_\beta^M + \Pi^m \mathcal{F}_{\beta m} = 2\pi\alpha' T_3 \sqrt{-\det(\gamma + \mathcal{F})} \delta_\beta^0, \quad (3.74)$$

$$2\pi\alpha' P_M \partial_0 X^M + \Pi^m \mathcal{F}_{0m} = 2\pi\alpha' T_3 \sqrt{-\det(\gamma + \mathcal{F})}, \quad (3.75)$$

gdzie P_M i Π^m są związane z \mathcal{P}_M i \mathcal{E} w następujący sposób:

$$P_M = T_3 \sqrt{-\det(\gamma + \mathcal{F})} \mathcal{P}_M^0,$$

$$\Pi^m = \frac{2\pi\alpha' T_3}{2} \sqrt{-\det(\gamma + \mathcal{F})} \mathcal{E}^{0m}.$$

Z (3.73) oraz z (3.74) (dla $\beta = m$) otrzymujemy dobrze znane więzy: Hamiltonowski i dyfeomorficzny [68]:

$$\begin{aligned} P_M P_N g^{MN} + \Pi^m \Pi^n \gamma_{mn} + T_3^2 \det[(\gamma + \mathcal{F})_{mn}] &= 0, \\ 2\pi\alpha' P_M \partial_m X^M + \Pi^n \mathcal{F}_{mn} &= 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Spełnione jest również prawo Gaussa:

$$\partial_m \Pi^m = 0.$$

Zakładamy, że pole zanurzenia X nie jest statyczne i ma postać:

$$X(\xi) = (\xi^0, \xi^m, X^a(\xi^0, \xi^m)) \quad (3.77)$$

oraz metryka tła g_{MN} jest następującej formy:

$$(g_{MN}) = \begin{pmatrix} g_{00} & & \\ & (g_{mn}) & \\ & & (g_{ab}) \end{pmatrix}$$

z sygnaturą $(-1, +1, \dots, +1)$, więc $-g_{00} \geq 0$. Dla takiego pola zanurzenia X indukowana metryka $\gamma_{\alpha\beta}$ na branie jest następująca:

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= g_{00} + g_{ab} \dot{X}^a \dot{X}^b, \\ \gamma_{0m} &= g_{ab} \dot{X}^a \partial_m X^b, \quad \gamma_{m0} = g_{ab} \partial_m X^a \dot{X}^b, \\ \gamma_{mn} &= g_{mn} + g_{ab} \partial_m X^a \partial_n X^b. \end{aligned} \quad (3.78)$$

W przypadku jednorodnym $\partial_m X^a = 0$ otrzymujemy, że macierz M jest postaci:

$$M^{mn} = (2\pi\alpha')^2 \gamma^{mn} \det(\gamma_{rp}) + (2\pi\alpha')^4 B^m B^n,$$

oraz Lagranżian jest równy:

$$L = T_3 \sqrt{- \left(g_{00} + g_{ab} \dot{X}^a \dot{X}^b \right) \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) \det(\gamma_{mn}) - \mathbf{E} M \mathbf{E}}.$$

Pędy poprzeczne P_a do D3-brany oraz styczne P_m (otrzymywane z więzu (3.76)) mają postać:

$$\begin{aligned} P_a &= - \frac{T_3^2 \det(\gamma_{mn})}{L} \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) \dot{X}^b g_{ab}, \\ P_m &= - \frac{T_3^2 (2\pi\alpha')^3 \det(\gamma_{rs})}{L} S_m = -\Pi^n F_{mn}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

gdzie $S_m = \varepsilon_{mnp} E^n B^p$ i ma interpretację wektora Poyntinga na D3-branie. Postać pędu Π^m jest następująca:

$$\Pi^m = - \frac{T_3^2}{L} M^{mn} E_n. \quad (3.80)$$

Całkowity pęd P_M ma składowe:

$$P_M = (\mathcal{H}, -\Pi^n F_{mn}, P_a), \quad (3.81)$$

gdzie \mathcal{H} gęstością energii oraz jego kwadrat jest równy:

$$P_M P^M = g^{00} \mathcal{H}^2 + g^{mn} P_m P_n + g^{ab} P_a P_b,$$

gdzie:

$$g^{mn} P_m P_n = \frac{(2\pi\alpha')^6 T_3^4}{L^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]^2 \det^2(\gamma_{mn}), \quad (3.82)$$

$$g^{ab}P_aP_b = \frac{T_3^4}{L^2} \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2\right)^2 \dot{X}^2 \det^2(\gamma_{mn}) \quad (3.83)$$

i $\dot{X}^2 = g_{ab}\dot{X}^a\dot{X}^b$ oraz iloczyn wektorowy jest zdefiniowany jako:

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_m = \varepsilon_{mnp}E^n B^p.$$

Więć Hamiltonowski daje nam wyrażenie na kwadrat gęstości energii:

$$\begin{aligned} -g^{00}\mathcal{H}^2 L^2 &= (2\pi\alpha')^2 T_3^4 [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]^2 \det^2(\gamma_{mn}) + (2\pi\alpha')^2 T_3^4 \left[\mathbf{E} \det(\gamma_{mn}) + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \right]^2 + \\ &T_3^4 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2\right)^2 \dot{X}^2 \det^2(\gamma_{mn}) + T_3^2 L^2 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2\right) \det(\gamma_{mn}), \end{aligned} \quad (3.84)$$

które można zapisać w postaci sumy kwadratów:

$$\begin{aligned} -g^{00}\mathcal{H}^2 &= \frac{(2\pi\alpha')^2 T_3^4}{L^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B} \det(\gamma_{mn}) + \mathbf{E} \det(\gamma_{mn}) + \mathbf{B} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})]^2 + \\ &\frac{T_3^2 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2\right)}{2L^2} \left[T_3 \sqrt{1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2} \left| \dot{X} \right| \sqrt{\det(\gamma_{mn})} + L \right]^2 \det(\gamma_{mn}) + \\ &\frac{T_3^2 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2\right)}{2L^2} \left[T_3 \sqrt{1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2} \left| \dot{X} \right| \sqrt{\det(\gamma_{mn})} - L \right]^2 \det(\gamma_{mn}). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Otrzymujemy z tego, że kwadrat gęstości energii jest ograniczony z dołu:

$$\begin{aligned} -g^{00}\mathcal{H}^2 &\geq \frac{(2\pi\alpha')^2 T_3^4}{L^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B} \det(\gamma_{mn}) + \mathbf{E} \det(\gamma_{mn}) + \mathbf{B} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})]^2 + \\ &\frac{T_3^2 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2\right)}{2L^2} \left[T_3 \sqrt{1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2} \left| \dot{X} \right| \sqrt{\det(\gamma_{mn})} + L \right]^2 \det(\gamma_{mn}). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Znak równości jest otrzymywany, gdy:

$$T_3 \sqrt{1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2} \left| \dot{X} \right| \sqrt{\det(\gamma_{mn})} = L. \quad (3.87)$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem w (3.66) musi być dodatnie aby otrzymać rzeczywisty Lagranżian. Ten warunek nakłada ograniczenia na dopuszczalne konfiguracje pola cechowania:

$$-\left(1 + (2\pi\alpha')^2 \gamma^{00} \mathbf{E}^2 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2\right) \det \gamma \geq (2\pi\alpha')^4 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2, \quad (3.88)$$

ponieważ $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 > 0$. Z tego warunku otrzymujemy, że:

$$-\gamma_{00} - (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2 - (2\pi\alpha')^2 \gamma_{00} \mathbf{B}^2 \geq 0, \quad (3.89)$$

który prowadzi do związku:

$$|\gamma_{00}| \geq (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2 - (2\pi\alpha')^2 |\gamma_{00}| \mathbf{B}^2$$

ponieważ $-\gamma_{00} > 0$. Ten związek jest w zgodzie z wynikiem [69], który mówi, że pole elektryczne na branie osiąga swoją maksymalną wartość. W przypadku, gdy w ostatnim związku zachodzi równość dostajemy, że $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ co pociąga za sobą znikanie Lagranżianu DBI.

Zdeformujemy czasową składową metryki γ przez pola \mathbf{E} i \mathbf{B} . Żądamy aby dla $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$ czasowa składowa metryki wracała do formy pierwotnej. Jedną z takich możliwych deformacji jest otrzymywana z warunku (3.89). Tak zdeformowana metryka ma postać:

$$dl'^2 = -V (d\xi^0)^2 + \gamma_{mn} d\xi^m d\xi^n,$$

gdzie funkcja V jest dana przez wyrażenie:

$$V = -\gamma_{00} \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) - (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2 \geq 0. \quad (3.90)$$

Warunek $V = 0$ wyznacza pewne konfigurację pól gdzie metryka dl'^2 staje się zdegenerowana. Te konfiguracje odpowiadają znikaniu Lagranżianu DBI. Taką D3-branę ze zdeformowaną metryką dl'^2 będziemy uważali za równoważną D3-branie z polami \mathbf{E} i \mathbf{B} . Następnie rozpatrzmy 10-wymiarową czasoprzestrzeń, której geometria jest zadawana przez metrkę opisującą $(d+2)$ -branę owijającą się na S^{d+1} :

$$ds^2 = -\lambda_0 dt^2 + \lambda_1 \sum_{i=1}^{\tilde{d}-1} dX_i^2 + \lambda_2 dr^2 + r^2 \lambda_3 d\Omega_{d+1}. \quad (3.91)$$

Dla pola zanurzenia

$$X^M (\xi^0, \xi^m) = (\xi^0, \xi^m, X^a (\xi^0)) \quad (3.92)$$

(gdzie $a = 4, \dots, 9$) indukowana metryka dl'^2 na D3-branie M ma postać:

$$\gamma_{00} = -\lambda_0 + \lambda_1 \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2 + \lambda_2 \dot{r}^2 + r^2 \lambda_3 \dot{\varphi}^2, \quad (3.93)$$

$$\gamma_{mn} = \lambda_1 \delta_{mn}, \text{ for } 3 \leq \tilde{d} - 1, \gamma_{m0} = 0. \quad (3.94)$$

gdzie $\dot{\varphi}^2 = h_{rs} \dot{\varphi}^r \dot{\varphi}^s$ oraz $h_{rs} = h_{rs}(\varphi)$ ($r, s = 1, \dots, d+1$) jest metryką na S^{d+1} . Używając (3.90) dostaniemy postać zdeformowanej metryki:

$$dl'^2 = - \left(\left(\lambda_0 - \lambda_1 \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2 - \lambda_2 \dot{r}^2 - r^2 \lambda_3 \dot{\varphi}^2 \right) \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) - (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2 \right) (d\xi^0)^2 + \lambda_1 d\xi_n d\xi^n. \quad (3.95)$$

W sferycznych współrzędnych (ρ, θ, ψ) na D3-branie M powyższa metryka przyjmuje formę:

$$dl'^2 = - \left(\left(\lambda_0 - \lambda_1 \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2 - \lambda_2 \dot{r}^2 - r^2 \lambda_3 \dot{\varphi}^2 \right) \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) - (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2 \right) (d\xi^0)^2 + \lambda_1 d\rho^2 + \rho^2 \lambda_1 d\Omega_2. \quad (3.96)$$

Opierając się na pomysłe Polchinskiego [27] mówiącego, że D-brana jest horyzontem zdarzeń dla strun zamkniętych (jedna część struny zamkniętej jest powyżej horyzontu a druga część poniżej, tak że część powyżej horyzontu wygląda jak struna otwarta, której końce są przyłączone do horyzontu, co oznacza, że horyzont definiuje klasyczną D-branę) porównamy metrykę (3.96) z metryką, która posiada horyzont. Standardowa postać takiej metryki (w odpowiednich współrzędnych) jest następująca:

$$ds^2 = -f(R) dt^2 + f^{-1}(R) dR^2 + R^2 d\Omega_2, \quad (3.97)$$

gdzie funkcja f jest równa zero dla pewnych wartości $R > 0$. Zera funkcji f są uporządkowane w następujący sposób: $R_+ > R_1, \dots, R_n$, największa wartość R_+ definiuje horyzont zdarzeń. Utożsamienie (3.96) i (3.97) prowadzi do związku na składowe dl' :

$$\left(\left(\lambda_0 - \lambda_1 \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2 - \lambda_2 \dot{r}^2 - r^2 \lambda_3 \dot{\varphi}^2 \right) \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) - (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2 \right) \lambda_1 = 1. \quad (3.98)$$

W przypadku gdy $\dot{r} = \dot{\varphi} = 0$ powyższy warunek przyjmuje postać:

$$\lambda_1^2 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2 - \lambda_1 \left[\lambda_0 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) - (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2 \right] + 1 = 0.$$

Rozwiązania tego równania ze względu na λ_1 są następujące:

$$\lambda_{1(\pm)} = \frac{\lambda_0 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) - (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2}{2 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2} \pm \frac{\sqrt{\left[\lambda_0 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) - (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2 \right]^2 - 4 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2}}{2 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2}. \quad (3.99)$$

λ_1 jest rzeczywiste, jeżeli:

$$D = \left[\lambda_0 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) - (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2 \right]^2 - 4 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2 \geq 0. \quad (3.100)$$

Istnieje jedno rozwiązanie (3.98) jeżeli $D = 0$. Warunek ten pozwala nam powiązać λ_0 z \dot{X}_i , \mathbf{E} i \mathbf{B} :

$$\left[\lambda_0 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) - (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2 \right]^2 = 4 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2. \quad (3.101)$$

W tym wypadku otrzymujemy jawne postacie λ_0 oraz λ_1 :

$$\lambda_0 = \frac{(2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2 \pm 2\sqrt{\left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2}}{1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2}, \quad (3.102)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2}}. \quad (3.103)$$

Zauważmy, że λ_0 będzie większa od zera dla wszystkich konfiguracji, jeżeli wybierzemy znak $+$ w równaniu (3.102). W przypadku znaku $-$ dopuszczalne konfiguracje są ograniczone przez warunek:

$$\frac{(2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2}{2\sqrt{1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2}} \geq \sqrt{\sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2}.$$

Tak więc metryka dl' ma postać:

$$dl'^2 = -\sqrt{\left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2} (d\xi^0)^2 + \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_2}{\sqrt{\left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2}}. \quad (3.104)$$

W przypadku statycznym tzn. $\dot{X}_i = \dot{r} = \dot{\varphi} = 0$, warunek (3.98) daje związek:

$$\left(\lambda_0 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) - (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2 \right) \lambda_1 = 1. \quad (3.105)$$

Jawna postać metryki jest następująca:

$$dl'^2 = - \left(\lambda_0 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) - (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2 \right) (d\xi^0)^2 + \frac{1}{\lambda_0 \left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) - (2\pi\alpha')^2 \mathbf{E}^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_2). \quad (3.106)$$

Metryka ta opisuje czasoprzestrzeń z horyzontem, który jest zadany przez warunek zerowania Lagranżianu DBI (ponieważ $|\gamma_{00}| = |\lambda_0|$).

Wykonujemy w metryce (3.104) następującą zamianę zmiennej $\xi_0 = t$ na τ (zakładając, że pole magnetyczne B nie zależy od czasu):

$$\tau(t) = \int^t F(t') dt', \quad (3.107)$$

gdzie:

$$F(t) = \left[\left(1 + (2\pi\alpha')^2 \mathbf{B}^2 \right) \sum_{i=4}^{\tilde{d}-1} \dot{X}_i^2(t) \right]^{1/4}. \quad (3.108)$$

W wyniku takiej zamiany zmiennej metryka przyjmuje formę:

$$dl^{2'} = -d\tau^2 + \left[\frac{1}{F(t(\tau))} \right]^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_2), \quad (3.109)$$

oraz funkcja $t(\tau)$ jest odwróceniem relacji (3.107):

$$t = t(\tau).$$

Ażeby przewidzieć jak metryka (3.104) zmienia się w czasie, założymy następującą postać funkcji $F(t)$:

$$F(t) = \Lambda^{1/2} t^{\alpha/2}, \quad (3.110)$$

gdzie α i Λ są stałymi. Funkcja ta jest związana z rozwiązaniami Kastera-Traschena [70] dla $\alpha = 1$. Rozwiązania te zostały uogólnione dla bran w [71]. Postać metryki (3.104) dla takiej funkcji przyjmuje formę:

$$dl^{2'} = -\Lambda t^{\alpha/2} dt^2 + \Lambda^{-1} t^{-\alpha/2} d\mathbf{x}^2. \quad (3.111)$$

Współrzędne τ oraz t są związane przez formułę

$$t(\tau) = \left[(1 + \alpha/4) \sqrt{\Lambda} \tau \right]^{4/(4+\alpha)} \quad (3.112)$$

(dla $\alpha \neq -4$) a metryka (3.111) jest następująca:

$$dl^{2'} = -d\tau^2 + \Lambda^{-1} \left[(1 + \alpha/4) \sqrt{\Lambda} \right]^{-2\alpha/(4+\alpha)} \tau^{-2\alpha/(4+\alpha)} d\mathbf{x}^2. \quad (3.113)$$

W przypadku kiedy $\alpha = -4$ zmienne t i τ są związane w następujący sposób:

$$t(\tau) = \exp\left(\tau/\sqrt{\Lambda}\right), \quad (3.114)$$

oraz metryka (3.111) jest dana przez:

$$dl^{2'} = -d\tau^2 + \Lambda^{-1} \exp\left(-\tau/\sqrt{\Lambda}\right) d\mathbf{x}^2. \quad (3.115)$$

Jeżeli $\alpha \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$, to $2\alpha/(4 + \alpha) > 0$. Metryka (3.113) reprezentuje D3-branę o malejących rozmiarach przestrzennych, dla rosnącego τ . Metryka (3.115) reprezentuje D3-branę z geometrią de Sittera zapisaną we współrzędnych kosmologicznych. Metryka Kasner jest otrzymana dla $\alpha = 4/3$ ([71]). Dla

$\alpha = 0$ metryka jest statyczna. D3-brana z rosnącymi rozmiarami jest otrzymana dla $\alpha \in (-4, 0)$ (ponieważ $2\alpha/(4 + \alpha) < 0$). W ten sposób otrzymaliśmy rodzinę D3-bran o rosnących i malejących rozmiarach w zależności od wartości parametru α .

Odległość l w kierunkach poprzecznych X_i do D3-brany jest wyrażana przez metrykę (3.91) i jest równa:

$$l = \int \sqrt{\lambda_1} ds,$$

gdzie s jest parametrem na krzywej leżącej w kierunkach X_i . Z (3.103) i (3.110) otrzymujemy:

$$l = \begin{cases} \frac{4t^{(1-\alpha/4)}}{\sqrt{\Lambda(4-\alpha)}} & \text{for } \alpha \neq 4 \\ \frac{\ln t}{\sqrt{\Lambda}} & \text{for } \alpha = 4 \end{cases}. \quad (3.116)$$

We współrzędnej τ powyższe wyrażenie ma postać:

$$l = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\Lambda(4-\alpha)}} \left[(1 + \alpha/4) \sqrt{\Lambda} \right]^{\frac{4-\alpha}{4+\alpha}} \tau^{\frac{4-\alpha}{4+\alpha}} & \text{for } \alpha \neq -4, +4 \\ \frac{1}{2\sqrt{\Lambda}} \ln \left(2\sqrt{\Lambda}\tau \right) & \text{for } \alpha = +4 \\ \frac{1}{2\sqrt{\Lambda}} \exp \left(2\tau/\sqrt{\Lambda} \right) & \text{for } \alpha = -4 \end{cases}. \quad (3.117)$$

Odległość l musi być dodatnia więc $4 > \alpha$. Poprzeczne kierunki mogą zwiększać (ekspansja) albo zmniejszać (kontrakcja) swoje rozmiary względem D3-brany. Dla $\alpha \in (-4, +4)$ mamy ekspansję a dla $\alpha \in (-\infty, -4)$ kontrakcję. Przypadki gdy $\alpha = -4$ i $\alpha = +4$ odpowiadają ekspansji kierunków poprzecznych. Podsumowując powyższe rozważania dostajemy następujący obraz dynamiki D3-brany i otaczającej jej przestrzeni w zależności od wartości parametru α :

- Dla $\alpha \in (-\infty, -4)$ kierunki styczne i poprzeczne zmniejszają swoje rozmiary.
- Dla $\alpha \in (-4, 0)$ kierunki styczne i poprzeczne ekspandują.
- Dla $\alpha \in (0, +4]$ kierunki styczne zmniejszają swoje rozmiary, natomiast kierunki poprzeczne ekspandują.
- Dla $\alpha = -4$ kierunki styczne są opisane przez przestrzeń de Sittera, która zmniejsza swoje rozmiary od maksymalnego rozmiaru $\Lambda^{-1/2}$. Kierunki poprzeczne podlegają ekspansji i minimalne rozmiary poprzecznej przestrzeni wynoszą $2^{-1}\Lambda^{-1/2}$.
- Dla $\alpha = 0$ D3-brana jest statyczna (jej rozmiary nie zależą od τ) a kierunki poprzeczne ekspandują.

4 Funkcja falowa D3-brany

Pomysł Hartle'a i Hawkinga dotyczący warunków brzegowych, które musi spełniać funkcja falowa, polegał na uwzględnieniu tylko zwartych metryk i pól

(będących regularnymi w tych metrykach) w całce funkcjonalnej definiującej funkcję falową [72, 73]. Całka ta jest zdefiniowana przez działanie Euklidesowe dla pola grawitacyjnego ze stałą kosmologiczną oraz przez działanie dla pól materii. Dziedziną całkowania są czterogeometrie (metryki) Euklidesowe, posiadające brzeg z indukowaną trójgeometrią (trój-metryka) zadającą pewną przestrzenną rozmaitość oraz pola mające ustaloną wartość na tej rozmaitości. Funkcja falowa jest funkcją tej trójwymiarowej metryki na przestrzennej rozmaitości oraz zależy od pól materii na tej rozmaitości. Wybór czterogeometrii oznacza zadanie warunków brzegowych na funkcję falową. W propozycji Hartle'a i Hawkinga czterogeometrie zostały ograniczone tylko do zwartych. Oznacza to, że wszechświat nie ma brzegu w części przestrzennej oraz czasowej. Są to tak zwane warunki brzegowe "bez-brzegu". Ponieważ Euklidesowa całka funkcjonalna w grawitacji nie jest dobrze określona, ogranicza się stopnie swobody do mini-superprzestrzeni (mini-superspace) (nie mającej nic wspólnego z supersymetrią).

Przykładem powyższych warunków jest przypadek gdy rozmaitością przestrzenną jest sfera trójwymiarowa S^3 a mini-superprzestrzeń jest zadawana przez dwa stopnie swobody, jeden związany z metryką, drugi zaś z jednorodnym polem materii. Zastosowanie tej konstrukcji daje szczególne rozwiązanie równania Wheelera-de Witta dla grawitacji Einsteinowskiej z dodatnią stałą kosmologiczną. Rozwiązanie to jest reprezentowane przez formalną Euklidesową całkę funkcjonalną na czterowymiarowej kuli B_4 , której brzegiem jest sfera S^3 . Tak otrzymane rozwiązanie na B_4 odpowiada funkcji falowej wszechświata, który rozszerza się wykładniczo z powodu dodatniej stałej kosmologicznej. Niemniej istnieją rozmaitości czterowymiarowe, które dają inne funkcje falowe, ale brzegiem ich jest także S^3 .

Konstrukcję funkcji falowej wszechświata zastosowano w [72-75] z uwzględnieniem wyników teorii superstrun uwzględniającej zaburzeniową kwantową grawitację. Celem tych prac miało być otrzymanie zasady określającej wybór najbardziej prawdopodobnego czterowymiarowego wszechświata z możliwych próżniowych rozwiązań (landscape) teorii superstruny.

W modelu branowym [76] otrzymałem równanie Wheelera-de Witta dla D3-brany znajdującej się w tle (background) indukowanym przez rozwiązanie superstrunowe, mianowicie Dp-brany. Rozwiązanie tego równania dało funkcję falową D3-brany zależną od położenia względem bran tworzących tło. Dwa szczególne przypadki tej funkcji odpowiadają funkcji Hartle'a-Hawkinga oraz funkcji występującej w tunelowaniu instantonowym ze znikającą stałą kosmologiczną. Na poziomie klasycznym na objętości świata D3-brany odpowiada to istnieniu pewnej cieczy doskonałej, dla której równanie stanu $w = p/\rho$ przechodzi w równanie stanu $w = -1$, gdy rozmiary D3-brany stają się duże. Odpowiada to przyspieszonej ekspansji objętości świata tej brany. Aby mógł wystąpić taki efekt na poziomie klasycznym, musi nastąpić tunelowanie przez barierę potencjału, otrzymanego w tym modelu. Obliczyłem tu prawdopodobieństwo przejścia przez tę barierę w punkcie, który odpowiada rozmiarom Plancka D3-brany. Prawdopodobieństwo to jest funkcją efektywnej stałej kosmologicznej D3-brany oraz parametrów określających tło. Warunek maksymalnego praw-

dopodobieństwa prowadzi do wartości zerowej stałej kosmologicznej. Jednakże dla małych wartości tej stałej prawdopodobieństwo tunelowania nie zmniejsza się w sposób drastyczny. Oznacza to, że chociaż zerowa wartość stałej kosmologicznej jest preferowana, to inne niezerowe małe wartości mogą być realizowane.

Działanie, które rozpatruję w [76] ma postać działania DBI dla D3-brany (modulo wyraz WZ):

$$S_3 = -T_3 \int d^4x e^{-\phi} \sqrt{-\det(\gamma_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta})}, \quad (4.1)$$

gdzie wielkości mają taką samą interpretację jak w (3.64). Jak pokazano w [77], działanie to można zapisać w równoważnej postaci wprowadzając pomocnicze pole tensorowe $h_{\alpha\beta}$ w objętości-świata D3-brany. Będziemy rozpatrywać przypadek, gdy pola $F_{\alpha\beta}$ i $B_{\alpha\beta}$ znikają. Wtedy związek (4.1) ma postać 4-wymiarowego działania Nabu-Goto:

$$S'_3 = -\frac{\Lambda T_3}{2} \int d^4x e^{-\phi} \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})} [h^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} - 2\Lambda], \quad (4.2)$$

gdzie Λ jest wielkością stałą. Pole $h_{\alpha\beta}$ będziemy uważali jako niezależny stopień swobody, który jest odpowiedzialny za grawitację na D3-branie, natomiast γ jest rozważane jako pole indukowane przez tło. Tak, więc całkowite działanie jest otrzymane przez dodanie wyrazu Einsteina-Hilberta do (4.2):

$$S = \frac{m_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})} R(h) - \frac{\Lambda T_3}{2} \int d^4x e^{-\phi} \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})} [h^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} - 2\Lambda], \quad (4.3)$$

gdzie $m_P^2 = (8\pi G)^{-1}$. Następnie stosujemy konstrukcje ADM dla takiego układu. W konstrukcji tej zakłada się, że objętość-świata D3-brany M jest iloczynem: $\mathbf{R}^1 \times \Sigma_3$ gdzie Σ_3 jest 3-wymiarowym przestrzenym cięciem M . Metryka $h_{\alpha\beta}$ jest wyznaczona przez wektor N^m i funkcję N w następujący sposób:

$$h_{00} = -N^2 + \bar{h}_{mn} N^m N^n, \quad h_{0m} = \bar{h}_{mn} N^n, \quad h_{mn} = \bar{h}_{mn},$$

gdzie \bar{h}_{mn} jest wewnętrzną metryką na Σ_3 . Macierz odwrotna ($h^{\alpha\beta}$) do ($h_{\alpha\beta}$) ma składowe:

$$h^{00} = -1/N^2, \quad h^{0m} = N^m/N^2, \quad h^{mn} = \bar{h}^{mn} - N^m N^n / N^2.$$

Używając powyższych związków otrzymamy:

$$h^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{N^2} (\gamma_{00} + N^m N^n \gamma_{mn} - 2N^m \gamma_{0m}) + \bar{h}^{mn} \gamma_{mn}.$$

Działanie (4.3) we współporuszających współrzędnych ($N^m = 0$, $h_{mn} = \bar{h}_{mn}$) dla metryki Friedmanna-Robertsona-Walkera (FRW):

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kR^2} + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (4.4)$$

przyjmuje postać:

$$S = \frac{m_P^2}{2} \int_{\Sigma_3} d\mu \int_{\mathbf{R}^1} dt a^3 N \left[\frac{\tilde{k}}{a^2} - \left(\frac{\dot{a}}{Na} \right)^2 \right] - \frac{\Lambda T_3}{2} \int_{\mathbf{R}^1} dt \int_{\Sigma_3} d\mu a^3 e^{-\phi} N \left[-\frac{\gamma_{00}}{N^2} + \frac{1}{a^2} h^{mn} \gamma_{mn} - 2\Lambda \right], \quad (4.5)$$

gdzie

$$d\mu = \frac{6R^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - \tilde{k}R^2}} dR d\phi d\theta$$

oraz

$$h^{mn} \gamma_{mn} = \left(1 - \tilde{k}R^2 \right) \gamma_{RR} + \frac{1}{R^2} \gamma_{\theta\theta} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \gamma_{\phi\phi}.$$

Dla naszych celów założymy, że Σ_3 ma symetrię grupy $O(4)$ a metryka h_{mn} jest metryką na S^3 . Więc $\tilde{k} = +1$. Przy takich założeniach działanie (4.5) przyjmuje postać:

$$S = 6\pi^2 m_P^2 \int_{\mathbf{R}^1} dt a^3 N \left[\frac{1}{a^2} - \left(\frac{\dot{a}}{Na} \right)^2 \right] + 6\pi^2 \Lambda T_3 \int_{\mathbf{R}^1} dt a^3 e^{-\phi} N \left[\frac{\gamma_{00}}{N^2} + 2\Lambda \right] - \frac{\Lambda T_3}{2} \int_{\mathbf{R}^1} dt a \int_{S^3} d\mu e^{-\phi} N \text{Tr}(\gamma), \quad (4.6)$$

gdzie:

$$\text{Tr}(\gamma) = h^{mn} \gamma_{mn}.$$

Funkcja $N(t)$ może być wybrana dowolnie poprzez redefinicję współrzędnej czasowej. Będziemy przyjmować następujące cechowanie $N = 1$.

Cały ten układ jest zanurzony w płaskiej 10-wymiarowej czasoprzestrzeni, która jest wytwarzana przez N BPS Dp -bran. Metryka g_{MN} , dylaton ϕ i pole C (z sektora RR) dla takiego tła mają postać (np. [78]):

$$ds_{10}^2 = g_{MN} dX^M dX^N = H_p^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + H_p^{1/2} dX_I dX^I, \quad (4.7)$$

$$e^{2\phi} = H_p^{(3-p)/2}, \quad (4.8)$$

$$C = (H_p^{-1} - 1) dX^0 \wedge \dots \wedge dX^p, \quad (4.9)$$

gdzie indeksy mają zakresy zmienności: $\mu, \nu = 0, 1, \dots, p$ oraz $I = p+1, \dots, 9$ natomiast H_p jest funkcją harmoniczną współrzędnych poprzecznych (X_I) do objętości-świata:

$$H_p = 1 + \frac{Ng_s}{r^{7-p}}, \quad (r = (X_I X^I)^{1/2}) \quad (4.11)$$

oraz $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$.

Będziemy rozpatrywali Dp -brany z wymiarem $p > 3$ oraz wybierzemy pole zanurzenia X w postaci:

$$X(x) = (t, x^1, \dots, x^3, X^4(t), \dots, X^9(t)). \quad (4.12)$$

Dla takiego pola zanurzenia otrzymamy:

$$\gamma_{00} = H_p^{-1/2} \left(-1 + \dot{X}^i \dot{X}_i \right) + H_p^{1/2} \dot{X}^I \dot{X}_I,$$

$$\gamma_{mn} = H_p^{-1/2} \delta_{mn},$$

gdzie $i = 4, \dots, p$. Całka po S^3 w ostatnim wyrazie (4.6) jest równa:

$$\int_{S^3} d\mu e^{-\phi} Tr(\gamma) = 12\pi^2 \left(1 + 2 + \frac{1}{2} \ln 2 \right) H_p^{(p-5)/4}.$$

Tak, więc działanie (4.6) przyjmuje postać:

$$S = 6\pi^2 \int_{\mathbf{R}^1} dt \left[m_P^2 a^3 \left(\frac{1}{a^2} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right) - \Lambda T_3 \gamma a H_p^{(p-5)/4} + L \right], \quad (4.13)$$

gdzie L jest zadane przez:

$$L = \Lambda T_3 a^3 \left[-H_p^{(p-5)/4} \left(1 - \dot{X}^i \dot{X}_i - H_p \dot{X}^I \dot{X}_I \right) + 2\Lambda \right] \quad (4.14)$$

oraz $\gamma = 1 + 2 + \frac{1}{2} \ln 2 \simeq 3.3466$. W kierunkach rozpinanych przez X_i i X_I wprowadzimy współrzędne sferyczne:

$$X_i = \varrho f_i, \quad X_I = r h_I,$$

gdzie $f_i f^i = h_I h^I = 1$. W ogólnym przypadku D3-brana ma niezerowy moment pędu w kierunkach poprzecznych (X_I) i niezerowy moment pędu w kierunkach poprzecznych (X_i) do D3-brany, które są równoległe do bran tworzących tło.

Przy założeniu, że: $\dot{f}_i = \dot{h}_I = 0$ związek (4.14) przyjmuje postać:

$$L = \Lambda T_3 a^3 \left[-H_p^{(p-5)/4} \left(1 - \dot{\varrho}^2 - H_p \dot{r}^2 \right) + 2\Lambda \right].$$

Trzy dynamiczne pola (a, ϱ, r) rozpinają mini-superprzestrzeń z działaniem:

$$S = 6\pi^2 \int_{\mathbf{R}^1} dt \left[-m_P^2 a \dot{a}^2 + \Lambda T_3 a^3 H_p^{(p-5)/4} \left(\dot{\varrho}^2 + H_p \dot{r}^2 \right) - \tilde{U}(a, r) \right], \quad (4.15)$$

gdzie potencjał \tilde{U} jest dany przez:

$$\tilde{U}(a, r) = a^3 \Lambda T_3 \left(H_p^{(p-5)/4} - 2\Lambda \right) - a \left(m_P^2 + \Lambda T_3 \gamma H_p^{(p-5)/4} \right). \quad (4.16)$$

Metryka $\tilde{G}_{\Sigma\Phi}$ na mini-superprzestrzeni jest odczytana z (4.15) i jest postaci:

$$\left(\tilde{G}_{\Sigma\Phi} \right) = \begin{pmatrix} -m_P^2 a & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda T_3 a^3 H_p^{(p-5)/4} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda T_3 a^3 H_p^{(p-1)/4} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Korzystając z równania ruchu dla ϱ :

$$\frac{d}{dt} \left[a^3 H_p^{(p-5)/4} \dot{\varrho} \right] = 0,$$

otrzymujemy:

$$\dot{\varrho} = J a^{-3} H_p^{(5-p)/4},$$

gdzie J jest stałą. Eliminując $\dot{\varrho}$ z działania (4.15) dostajemy:

$$S = 6\pi^2 \int_{\mathbf{R}^1} dt \left[-m_P^2 a \dot{a}^2 + \Lambda T_3 a^3 H_p^{(p-1)/4} r^2 - U(a, r) \right] \quad (4.18)$$

oraz potencjał U jest postaci:

$$U(a, r) = a^3 \Lambda T_3 \left(H_p^{(p-5)/4} - 2\Lambda \right) - a \left(m_P^2 + \Lambda T_3 \gamma H_p^{(p-5)/4} \right) + J^2 a^{-3} H_p^{(5-p)/4}. \quad (4.19)$$

W ten sposób mini-superprzestrzeń jest zredukowana i jest rozpinana przez pola a i r . Metryką $G_{\Sigma\Phi}$ dla zredukowanej mini-supreprzestrzeni jest dana poniżej przez wyrażenie:

$$(G_{\Sigma\Phi}) = \begin{pmatrix} -m_P^2 a & \\ & \Lambda T_3 a^3 H_p^{(p-1)/4} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

W przypadku, gdy r jest ustalone, równania dla a są otrzymane z więzu Hamiltonowskiego oraz z (4.18). Mają one postać:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\Lambda T_3}{m_P^2} \left(H_p^{(p-5)/4} - 2\Lambda \right) - \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{\Lambda T_3 \gamma}{m_P^2} H_p^{(p-5)/4} \right) + \frac{1}{a^6} \frac{J^2}{m_P^2} H_p^{(5-p)/4}, \quad (4.21)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{m_P^2} \left[\Lambda T_3 \left(2\Lambda - H_p^{(p-5)/4} \right) + \frac{2}{a^6} J^2 H_p^{(5-p)/4} \right]. \quad (4.22)$$

Porównując te równania ze standardowymi równaniami Friedmanna dla cieczy doskonałej z gęstością energii ρ i ciśnieniem p :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{1}{3m_P^2} \rho - \frac{k}{a^2}, \quad (4.23)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6m_P^2} (\rho + 3p), \quad (4.24)$$

(k jest parametrem krzywizny) zauważamy, że gęstość energii ρ jest zadana przez:

$$\rho = 3\Lambda T_3 \left(H_p^{(p-5)/4} - 2\Lambda \right) + \frac{3}{a^6} J^2 H_p^{(5-p)/4}, \quad (4.25)$$

ciśnienie p wyraża się jak następuje:

$$p = -3\Lambda T_3 \left(H_p^{(p-5)/4} - 2\Lambda \right) + \frac{3}{a^6} J^2 H_p^{(5-p)/4} \quad (4.26)$$

a parametr krzywizny k jest równy:

$$k = 1 + \frac{\Lambda T_3 \gamma}{m_P^2} H_p^{(p-5)/4}. \quad (4.27)$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie w (4.25) można interpretować jako stałą kosmologiczną λ , ponieważ jego wartość jest stała na objętości-świata D3-brany:

$$\lambda = 3\Lambda T_3 \left(H_p^{(p-5)/4} - 2\Lambda \right). \quad (4.28)$$

Równanie stanu dla tej cieczy doskonałej jest w formie:

$$w = \frac{p}{\rho} = - \left(1 - \frac{2J^2 H_p^{(5-p)/4}}{\Lambda T_3 \left(H_p^{(p-5)/4} - 2\Lambda \right) a^6 + J^2 H_p^{(5-p)/4}} \right). \quad (4.29)$$

Gdy $a \rightarrow \infty$, powyższe równanie przyjmuje postać:

$$w = \frac{p}{\rho} = -1. \quad (4.30)$$

Tak więc dla dużego a objętość-świata D3-brany będzie dominowana przez ciecz doskonałą z ujemnym ciśnieniem. Obserwator na D3-branie będzie widział przyspieszoną ekspansję kierunków przestrzennych brany.

Zauważmy, że dla $p = 5$ działanie (4.18) jest postaci:

$$S = 6\pi^2 \int_{\mathbf{R}^1} dt \left[-m_P^2 a \dot{a}^2 + \Lambda T_3 a^3 H_5 \dot{r}^2 + a (m_P^2 + \Lambda T_3 \sigma) - J^2 a^{-3} - a^3 \Lambda T_3 (1 - 2\Lambda) \right], \quad (4.31)$$

gdzie:

$$H_5 = 1 + \frac{N g_s}{r^2}.$$

Jeżeli zastąpimy pole r przez pole φ :

$$\varphi = \sqrt{N g_s + r^2} - N g_s \ln \left(\frac{N g_s + \sqrt{N g_s + r^2}}{r} \right), \quad (4.32)$$

to działanie (4.31) przyjmuje formę:

$$S = 6\pi^2 \int_{\mathbf{R}^1} dt \left[-m_P^2 a \dot{a}^2 + \Lambda T_3 a^3 \dot{\varphi}^2 + a (m_P^2 + \Lambda T_3 \gamma) - J^2 a^{-3} - a^3 \Lambda T_3 (1 - 2\Lambda) \right]. \quad (4.33)$$

Dla tła produkowanego przez 5-brany działanie jest zredukowane do swobodnego pola skalarnego φ sprzężonego z czynnikiem skali a , który posiada potencjał $v = -a (m_P^2 + \Lambda T_3 \gamma) + J^2 a^{-3} + a^3 \Lambda T_3 (1 - 2\Lambda)$. Dla $J = 0$ działanie (4.33) jest działaniem dla jednorodnej i izotropowej metryki g sprzężonej ze swobodnym polem skalarnym.

4.1 Równanie Wheelera-De Witta dla D3-brany

W mini-superprzestrzeni rozpinanej przez pola $Q = (Q_1, \dots, Q_N)$ ogólna postać równania Wheelera-De Witta (WD) jest następująca:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_\Theta \left(\sqrt{-G} G^{\Theta\Pi} \partial_\Pi \right) + U(Q) \right] \Psi(Q) = 0, \quad (4.34)$$

gdzie $G_{\Theta\Pi}$ jest metryką na mini-superprzestrzeni. W naszym przypadku metryka jest zadana przez równanie (4.20) oraz $Q = (a, r)$. W równaniu (4.34) należy uwzględnić uporządkowanie zmiennych sprzężonych. Kinetyczne wyrazy Hamiltonianu dla a i r są otrzymane z (4.18) i na poziomie klasycznym są wyrażone w równoważnych postaciach:

$$\frac{P_a^2}{a} = a^{-(j+k+1)} P_a a^j P_a a^k,$$

$$\frac{P_r^2}{\Lambda T_3 a^3 H_p^{(p-1)/4}} = \frac{1}{\Lambda T_3 a^3} H_p^{-(p-1)/4+u+w} P_r H_p^u P_r H_p^w,$$

gdzie j, k, u, w są dowolnymi liczbami. Jednakże na poziomie kwantowym należy uwzględnić związki komutacyjne między zmiennymi sprzężonymi, które prowadzą do niejednoznaczności w kwantowym Hamiltonianie. W kanonicznym kwantowaniu niejednoznaczność uporządkowania w wyrażeniu $f(x) P_x^2$ dla zmiennych sprzężonych (x, P_x) jest rozwiązana jak następuje:

$$f(x) P_x^2 \rightarrow -\hbar^2 (1 + A + B) f \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A + 2B}{1 + A + B} \frac{f'}{f} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{B}{1 + A + B} \frac{f''}{f} \right],$$

gdzie A, B są stałymi. Różniczkowa część operatora Hamiltona w rozważanym zagadnieniu przyjmuje postać:

$$\frac{\hbar^2}{2m_P^2 a} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{\gamma}{a} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\delta}{a^2} \right] +$$

$$- \frac{\hbar^2}{2\Lambda T_3 a^3 H_p^{(p-1)/4}} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\mu(1-p)}{4} \frac{H_p'}{H_p} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\nu(p-1)}{4H_p} \left(\frac{p+3}{4} \frac{H_p'}{H_p} - H_p'' \right) \right],$$

gdzie γ, δ, μ, ν reprezentują niejednoznaczności uporządkowania, prim zaś oznacza pochodną względem r . Równanie WD jest następujące:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{\gamma}{a} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\delta}{a^2} \right] \Psi +$$

$$- \frac{m_P^2}{\Lambda T_3 a^2 H_p^{(p-1)/4}} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\mu(1-p)}{4} \frac{H_p'}{H_p} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\nu(p-1)}{4H_p} \left(\frac{p+3}{4} \frac{H_p'}{H_p} - H_p'' \right) \right] \Psi$$

$$+ \frac{2m_P^2}{\hbar^2} U_{eff}(a, r) \Psi = 0, \quad (4.35)$$

gdzie efektywny potencjał $U_{eff}(a, r)$ jest równy:

$$U_{eff}(a, r) = a^4 \Lambda T_3 \left(H_p^{(p-5)/4} - 2\Lambda \right) - a^2 \left(m_P^2 + \Lambda T_3 \gamma H_p^{(p-5)/4} \right) + J^2 a^{-2} H_p^{(5-p)/4}. \quad (4.36)$$

Obecnie założymy, że r jest ustalone i będziemy uważali r za parametr. Przy tym założeniu, potencjał U_{eff} oraz funkcja falowa Ψ mają ustaloną wartość dla r , co powoduje, że równanie (4.35) przyjmuje postać:

$$\left[\frac{d^2}{da^2} - \frac{\gamma}{a} \frac{d}{da} - \frac{\eta}{a^2} - \frac{2m_P^4 k}{\hbar^2} a^2 + \frac{2m_P^2 \lambda}{3\hbar^2} a^4 \right] \Psi = 0, \quad (4.37)$$

gdzie k , λ są dane przez (4.27-4.28) oraz $\eta = -C - \delta + \nu D$ z C i D równymi:

$$C = \frac{2m_P^2}{\hbar^2} J^2 H_p^{(5-p)/4},$$

$$D = \frac{m_P^2 (p-1)}{4\Lambda T_3 H_p^{(p+7)/4}} \left((p+3) H_p' - 4H_p H_p'' \right).$$

Współczynnik D można przepisać jako:

$$D(r) = -\frac{m_P^2 (p-1)}{4\Lambda T_3 H_p^{(p+7)/4}} g(r) \quad (4.38)$$

gdzie:

$$g(r) = \frac{4(7-p)(8-p)Ng_s}{r^{8-p}} \left[\frac{3+p}{4(8-p)} + \frac{1}{r} + \frac{Ng_s}{r^{8-p}} \right]. \quad (4.39)$$

Równanie (4.37) można przetransformować do postaci:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{4s+1-\gamma}{2z} \frac{dF}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} + mz \right) F = 0, \quad (4.40)$$

gdzie z jest związane z a w następujący sposób:

$$z = -ia^2 \frac{m_P^2}{\hbar} \sqrt{\frac{k}{2}},$$

a funkcja falowa Ψ wyraża się przez F :

$$\Psi(z) = z^s F(z). \quad (4.41)$$

Współczynniki m i n^2 są równe:

$$m = -i \cdot \frac{\hbar \lambda}{3m_P^4 k} \sqrt{\frac{2}{k}}, \quad n^2 = \frac{\eta - 2s(2s - \gamma - 1)}{4}.$$

Jeżeli wybierzemy $s = (1 + \gamma)/4$, to równanie (4.40) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dF}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} + mz \right) F = 0 \quad (4.42)$$

gdzie:

$$n^2 = \eta/4 + (\gamma + 1)^2 / 16 \quad (4.43)$$

Równanie to jest podobne do równania Schrödingera rozpatrywanego w zjawisku Starka. Na początku rozważymy przypadek gdy $m = 0$. Rozwiązanie $F_0(z)$ dla $m = 0$ odpowiada znikaniu stałej kosmologicznej λ oraz w objętości-świata D3-brany istnieje ciecz doskonała z gęstością energii $\rho = 3J^2 H_p^{(5-p)/4} / a^6$ i równaniem stanu $w = +1$ (równania (4.25) i (4.29)). Przy naszym założeniu, że r jest parametrem możemy ustalić taką wartość r_0 , że m jest równe zero. Dla takiego r_0 otrzymamy związek:

$$2\Lambda = H_p^{(p-5)/4}(r_0) \quad (4.44)$$

oraz parametr k przyjmuje wartość:

$$k = 1 + \frac{T_3 \gamma}{2m_P^2} H_p^{(p-5)/2}(r_0).$$

Równanie (4.42) staje się równaniem Bessela:

$$\frac{d^2 F_0}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dF_0}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) F_0 = 0, \quad (4.45)$$

z rozwiązaniem równym:

$$F_0(z) = \tilde{E} J_n(z) + \tilde{F} Y_n(z),$$

gdzie J_n i Y_n są funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu n . Funkcja falowa Ψ dla $m = 0$ jest otrzymana z (4.41) i jest równa:

$$\Psi(a; r_0) = a^{(1+\gamma)/2} \left[E I_n \left(\frac{a^2}{l_{Pl}^2} \sqrt{\hbar^2 k / 2} \right) + F K_n \left(\frac{a^2}{l_{Pl}^2} \sqrt{\hbar^2 k / 2} \right) \right], \quad (4.46)$$

gdzie E i F są stałymi, $I_n(z)$ i $K_n(z)$ są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju oraz $l_{Pl} = \hbar / m_{Pl}$ jest długością Plancka. Funkcja falowa musi spełniać odpowiednie warunki brzegowe, aby była wszędzie regularna. Używając rozwinięć dla I_n i K_n w pobliżu zera, otrzymamy warunek na regularność Ψ :

$$1 + \gamma \geq \sqrt{4\eta + (\gamma + 1)^2}.$$

Oznacza to, że $4\eta \leq 0$. Jawna postać tego warunku jest następująca:

$$-\frac{2m_P^2}{\hbar^2 H_p^{(p-5)/4}(r_0)} J^2 - \delta + \nu D(r_0) \leq 0, \quad (4.47)$$

gdzie $D(r_0)$ jest zadane przez równanie (4.38). Z tej relacji można, w zasadzie, wyznaczyć położenia r D3-brany, dla których funkcja falowa jest zadana równaniem (4.46). Dla $z \rightarrow i\infty$ asymptotyki dla I_n i K_n są następujące:

$$I_n(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \exp(z), \quad K_n(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z).$$

Więc, funkcja falowa (4.46) dla dużych a ma postać:

$$\Psi(a; r_0) \simeq l_{Pl} \left(\frac{2}{\hbar^2 k} \right)^{1/4} a^{(\gamma-1)/2} \left[e \exp \left(+ \frac{a^2}{l_{Pl}^2} \sqrt{\hbar^2 k/2} \right) + f \exp \left(- \frac{a^2}{l_{Pl}^2} \sqrt{\hbar^2 k/2} \right) \right]. \quad (4.48)$$

Efekty branowego tła są zawarte w k i w rzędzie n funkcji Bessela. Regularność funkcji falowej w pobliżu zera narzuca związek (4.46) na możliwe położenia D3-brany. Przewidywania wynikające z tej funkcji falowej są dobrze znane i dyskutowane w związku z rozpadem fałszywej próżni [79].

Drugie dokładne rozwiązanie (4.40) jest otrzymane dla $s = (\gamma - 1) / 4$ i $n^2 = 0$. W tym przypadku (4.40) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + (1 + mz) F = 0. \quad (4.49)$$

Powyższe równanie jest równaniem Airy:

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{1}{m^2} t \Phi = 0, \quad (4.50)$$

gdzie $t = 1 + mz$ oraz $F(z) = \Phi(1 + mz)$. Rozwiązania Φ równania (4.50) zależą od znaku m^2 . Dla $m^2 > 0$ i dla $m^2 < 0$ są one dane przez związki:

$$\Phi_+(t) = \frac{\sqrt{t}}{3} \left[A' J_{-1/3} \left(\frac{2}{3|m|} t^{3/2} \right) + B' J_{1/3} \left(\frac{2}{3|m|} t^{3/2} \right) \right], \quad (4.51)$$

$$\Phi_-(t) = \frac{\sqrt{t}}{3} \left[AI_{-1/3} \left(\frac{2}{3|m|} t^{3/2} \right) + BI_{1/3} \left(\frac{2}{3|m|} t^{3/2} \right) \right]. \quad (4.52)$$

Ponieważ $m^2 = - \left(\frac{l_{Pl}^4 \lambda}{6} \right)^2 \left(\frac{2}{\hbar^2 k} \right)^3 < 0$, rozwiązanie jest zadawane przez (4.52). Ostatecznie funkcja falowa Ψ przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \Psi(a; r_0) &= \frac{e^{i\pi s}}{3} \left(\frac{1}{l_{Pl}^2} \sqrt{\hbar^2 k} \right)^s a^{2s} \sqrt{1 - \frac{a^2}{a_0^2}} \times \\ &\times \left[AI_{-1/3} \left(\frac{4}{l_{Pl}^4 \lambda} \left(\frac{\hbar^2 k}{2} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right)^{3/2} \right) + BI_{1/3} \left(\frac{4}{l_{Pl}^4 \lambda} \left(\frac{\hbar^2 k}{2} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right)^{3/2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.53)$$

gdzie $a_0^2 \equiv 3\hbar^2 k / (\lambda l_{Pl}^2)$ oraz $s = (\gamma - 1) / 4$. Jest ona prawdziwa dla $n^2 = 0$:

$$\eta + (\gamma - 1) (\gamma + 3) / 4 = 0. \quad (4.54)$$

Powyższy warunek ustala położenie r_0 D3-brany, ponieważ η jest zadawane przez H_p (równania (4.38) i (4.39)). Funkcja falowa (4.53) ma oscylujący charakter dla $3\hbar^2 k / (\lambda l_{Pl}^2) < a^2$ i jest regularna dla wszystkich $a \geq 0$. Jak można zauważyć (4.53) ma postać funkcji Hartle'a-Hawkinga dla pustego wszechświata ze stałą kosmologiczną [80].

W ten sposób otrzymaliśmy dwa szczególne rozwiązania równania (4.40), odpowiadające ustalonym położeniom D3-brany. Pierwsze rozwiązanie (4.46) jest otrzymane dla znikającej stałej kosmologicznej λ na D3-branie, której objętość świata jest wypełniona cieczą doskonałą o gęstości energii $3J^2 H_p^{(5-p)/4}/a^6$. Rozwiązanie to jest poprawne w obszarze, w którym zachodzi związek (4.47). Drugie rozwiązanie (4.53) jest otrzymane dla położenia D3-brany ustalonej przez (4.54).

Obecnie rozpatrzmy prawdopodobieństwo tunelowania w potencjale (4.36) dla ustalonego r_0 , gdy $m, n \neq 0$. Dla $s = (\gamma - 1)/4$ równanie (4.40) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} + mz\right) F = 0, \quad (4.55)$$

gdzie:

$$n^2 = \eta/4 + (\gamma - 1)(\gamma + 3)/16. \quad (4.56)$$

Równanie to możemy rozpatrywać jako równanie Schrödingera z potencjałem $V(z)$, które ma zerową wartość własną:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - V(z) F = 0, \quad (4.57)$$

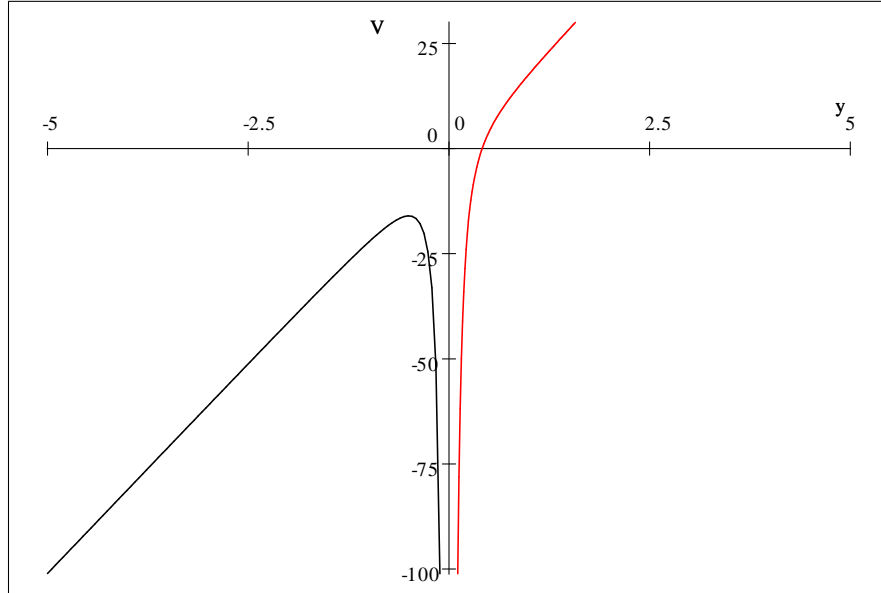
gdzie $V(z)$ jest dane przez:

$$V(z) = -1 + \frac{n^2}{z^2} - mz. \quad (4.58)$$

Dla zmiennej rzeczywistej $y = -\frac{\alpha^2}{l_{Pl}^2} \sqrt{\hbar^2 k/2} < 0$, takiej że $z = iy$, potencjał V ma postać:

$$V(y) = -1 - \frac{n^2}{y^2} + xn^2 \left(\frac{2}{\hbar^2 k}\right)^{3/2} y, \quad (4.59)$$

gdzie $x = l_{Pl}^4 \lambda / (6n^2)$ a l_{Pl} jest stałą Plancka. Wykres potencjału V jest naszkicowany poniżej:



Zmienna y ma znaczenie fizyczne tylko dla $y < 0$. Potencjał V ma maksimum dla

$$y_{\max} = -\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3} \left(\frac{\hbar^2 k}{2}\right)^{1/2}$$

i jego wartość jest równa:

$$V_{\max} = -1 - 3n^2 \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \frac{2}{\hbar^2 k}. \quad (4.60)$$

Czynnik skali a_0^2 odpowiadający y_{\max} jest równy:

$$a_0^2 = l_{Pl}^2 \left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

i jest większy niż l_{Pl} dla $x < 2$. W fizyce klasycznej, nigdy nie przejdziemy z obszaru, gdzie $a < a_0$, do obszaru, gdzie $a > a_0$, jeżeli energia układu E jest mniejsza niż V_{\max} . Oznacza to, że D3-brana będzie kurczyła się do zerowych rozmiarów, jeżeli $a < a_0$. Jednakże w reżimie kwantowym istnieje niezerowe prawdopodobieństwo tunelowania do obszaru, gdzie $a > a_0$. Obszar ten odpowiada ekspansji objętości-świata D3-brany. Prawdopodobieństwo tunelowania Γ w kwazi-klasycznym przybliżeniu jest zadawane przez:

$$\Gamma \simeq \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{y_2}^{y_3} \sqrt{-E + V(y)} dy \right], \quad (4.61)$$

gdzie granice całkowania y_3, y_2 są dane przez rozwiązanie równania:

$$E - V(y) = 0.$$

Pierwiastki y_3, y_2 są ujemne i uporządkowane w następujący sposób: $y_3 < y_2 < 0$. Więc dla $y \in (y_3, y_2)$ i $E < V_{\max} < 0$ otrzymamy:

$$E - V(y) < 0.$$

Oznacza to, że całka $I = \int_{y_2}^{y_3} \sqrt{-E + V(y)} dy$ jest rzeczywista i ma postać:

$$I = n\sqrt{x} \left(\frac{2}{\hbar^2 k} \right)^{3/4} \int_{y_2}^{y_3} \frac{dy}{y} \sqrt{f(y)}, \quad (4.62)$$

gdzie funkcja f jest wielomianem trzeciego stopnia:

$$f(y) = y^3 + \sigma y^2 - w, \quad (4.63)$$

gdzie $\sigma = -w(E+1)/(n^2)$ i $w = (\hbar^2 k/2)^{3/2}/x$. Granice całkowania y_3 i y_2 będą zależały od wartości energii E . Zrobimy rozsądne założenie, przyjmując, że minimalna wartość czynnika skali a jest równa długości Plancka $l_{Pl} = \hbar/m_{Pl}$. Ta minimalna wartość odpowiada $y_{Pl} = -\hbar\sqrt{k/2}$, w której potencjał V jest równy:

$$V(y_{Pl}) = -1 - 2n^2 \frac{1+x}{\hbar^2 k}, \quad (4.64)$$

oraz $V_{\max} > V(y_{Pl})$. Współczynnik σ dla $E = V(y_{Pl})$ ma wartość:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\hbar^2 k}{2}} \left(1 + \frac{1}{x} \right). \quad (4.65)$$

Dla wartości energii $E = V(y_{Pl})$ wykładnik w (4.61) jest równy:

$$\sqrt{-E + V(y)} = \sqrt{-V(y_{Pl}) + V(y)} = n\sqrt{x} \left(\frac{2}{\hbar^2 k} \right)^{3/4} \frac{1}{y} \sqrt{f(y)}. \quad (4.66)$$

Oznacza to, że wielomian $f(y)$ ma pierwiastek dla $y = y_{Pl} < 0$ i dolna granica całkowania jest równa: $y_2 = y_{Pl}$. Pozostałe pierwiastki wielomianu są dane przez związki:

$$y_1 = \frac{1}{2x} \sqrt{\frac{\hbar^2 k}{2}} (-1 + \sqrt{1 + 4x}), \quad (4.67)$$

$$y_3 = -\frac{1}{2x} \sqrt{\frac{\hbar^2 k}{2}} (1 + \sqrt{1 + 4x}). \quad (4.68)$$

Uporządkowane są one w następujący sposób: $y_3 < y_{Pl} < 0$ i $y_1 > 0$. Górna granica całkowania jest równa y_3 oraz wielomian $f = (y - y_3)(y - y_{Pl})(y - y_1)$ jest dodatni dla $y \in (y_3, y_{Pl})$. Szerokość bariery potencjału b jest równa $y_{Pl} - y_3$:

$$b = \sqrt{\frac{\hbar^2 \kappa}{2}} \left(-1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2x} \right) \quad (4.69)$$

i jest większa, niż zero dla $x \in (0, 2)$ oraz znika dla $x = 2$.

Całka (4.62) jest całką eliptyczną i jest równa:

$$I = n\sqrt{x} \left(\frac{2}{\hbar^2 k} \right)^{3/4} \left(\frac{\sigma}{3} I_1 - w I_{-1} \right), \quad (4.70)$$

gdzie:

$$I_s = \int_{y_{Pl}}^{y_3} \frac{y^s}{\sqrt{f(y)}} dy \quad (4.71)$$

i $s = -1, 1$. Wykonując podstawienie standardowe $y = y_3 + (y_{Pl} - y_3) \sin^2 \phi$ w całkach I_s otrzymujemy:

$$I_1 = -\frac{2y_1}{\sqrt{y_1 - y_3}} K(\kappa) + 2\sqrt{y_1 - y_3} E(\kappa), \quad (4.72)$$

$$I_{-1} = -\frac{2}{y_3 \sqrt{y_1 - y_3}} \Pi(c, \kappa), \quad (4.73)$$

gdzie $K(\kappa)$, $E(\kappa)$ i $\Pi(c, \kappa)$ są, odpowiednio zupełnymi całkami eliptycznymi pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju:

$$\begin{aligned} K(\kappa) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \kappa \sin^2 \phi}}, \\ E(\kappa) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \kappa \sin^2 \phi} d\phi, \\ \Pi(c, \kappa) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - c \sin^2 \phi) \sqrt{1 - \kappa \sin^2 \phi}}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Parametry κ i c są równe:

$$\kappa = \frac{y_{Pl} - y_3}{y_1 - y_3} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - 2x}{\sqrt{1 + 4x}} \right), \quad (4.75)$$

$$c = -\frac{y_{Pl} - y_3}{y_3} = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{1 + 4x}) > 0. \quad (4.76)$$

Przyjmując one wartości: $0 < \kappa < 1$ i $0 < c < 1$ dla $x \in (0, 2)$. Więc całka I jest równa:

$$I = n\sqrt{x} \left(\frac{2}{\hbar^2 k} \right)^{3/4} \left(-\frac{2\sigma y_1}{3\sqrt{y_{31}}} K(\kappa) + \frac{2\sigma\sqrt{y_{31}}}{3} E(\kappa) + \frac{2w}{y_3 \sqrt{y_1 - y_3}} \Pi(c, \kappa) \right), \quad (4.77)$$

gdzie $y_{31} = y_1 - y_3 > 0$ i $y_{32} = y_2 - y_3 > 0$. Zbierając powyższe związki otrzymujemy I jako funkcję x i n :

$$\begin{aligned} I(x, n) &= n \frac{1+x}{6x(1+4x)^{1/4}} [4\sqrt{1+4x} E(\kappa) + (1 - \sqrt{1+4x}) K(\kappa)] + \\ &+ n \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{(1+4x)^{1/4}} \Pi(c, \kappa). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Funkcja ta zmierza do ∞ , jeżeli $x \rightarrow 0$, i jest malejącą funkcją x z minimum dla $x = 2$

$$I(2, n) = \frac{\pi n}{4\sqrt{2}}. \quad (4.79)$$

Dla wartości $x = 2$ szerokość bariery znika oraz $n^2 = l_{Pl}^4 \lambda / 12$. Dla $x = 2$ wartość prawdopodobieństwa tunelowania Γ jest równa:

$$\Gamma = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} I(2, n)\right) = \exp\left(-\frac{\pi n}{2\sqrt{2}\hbar}\right). \quad (4.80)$$

Ponieważ $n \geq 0$ i jest funkcją r oraz parametrów związanych z uprządkowaniem (równania (4.56), (4.36) i (4.39)), więc Γ przyjmuje swoją maksymalną wartość dla $n = 0$, co odpowiada znikaniu stałej kosmologicznej ($\lambda = 0$) na D3-branie. Położenie r_{\max} , dla którego Γ jest maksymalne, jest określone z warunku:

$$n(r_{\max}) = 0.$$

Funkcja falowa dla takich położen jest zadana przez (4.46).

Podsumowując, rozpatrzyliśmy grawitację na D3-branie, która jest zanurzona w płaskiej 10-wymiarowej czasoprzestrzeni. Działanie dla takiego układu jest opisywane sumą działań Hilberta-Einsteina oraz działania DBI. Chociaż działanie DBI jest nieliniowe, to można je zapisać w dogodniejszej postaci z dodatkowym polem na D3-branie. Klasyczne równania ruchu prowadzą do wniosku, że wraz ze wzrostem czynnika skali a otrzymujemy przyspieszoną ekspansję objętości-świata D3-brany. Aby opisać kwantowo-mechaniczne właściwości układu, zostało rozpatrzone równanie Wheelera-de Witta. Jawna postać, rozwiązania tego równania, została znaleziona w dwóch szczególnych przypadkach. W pierwszym przypadku funkcja falowa ma postać funkcji związanej z tunelowaniem instantonów, w drugim zaś przypadku otrzymujemy funkcję falową Hartle'a-Hawkinga. Postać funkcji falowej zależy od położenia r D3-brany. Dla ustalonego położenia r równanie WD jest podobne do równania stosowanego przy opisie zjawiska Starka. Metody zaburzeniowe, których używa się w tym opisie, nie są tu odpowiednie, ponieważ nie wiadomo, który parametr w równaniu (4.42) należy traktować jako mały. Założyliśmy, że minimalna wartość czynnika skali a , dla którego model jest jeszcze prawdziwy, to długość Plancka. Dla tej wartości a obliczyliśmy prawdopodobieństwo przejścia Γ , które jest skończone i zależy od λ i r . Maksymalna wartość Γ jest osiągnana dla $x = 2$ oraz stała kosmologiczna jest równa $\lambda = 12n^2 l_{Pl}^{-4}$.

Rozpatrywany model ma cechy analogiczne do cech atomu wodoru w zewnętrznym polu elektrycznym. Takie pole jest tu reprezentowane przez Dp-brany tworzące tło, D3-brana natomiast odpowiada atomowi wodoru. Tunelowanie D3-brany z rozmiarów Plancka do obszaru klasycznego odpowiada jonizacji atomu.

5 Anizotropowa ewolucja D3-brany

W [81] rozpatrywałem D3-brane z topologią iloczynu kartezjańskiego płaskiej n -wymiarowej płaskiej przestrzeni V_n oraz $(3-n)$ -wymiarowej sfery S^{3-n} :

$$V_n \times S^{3-n} \quad (5.1)$$

gdzie $n = 0, 1, 2, 3$. Taka D3 brana jest zanurzona w nietrywialnym tle produkowanym przez Dp-brany. Rozwiązania tworzące tło [np. 66, 78] posiadają grupę symetrii $\mathbf{R}^1 \times E_{(6-p)} \times SO(p+3)$ ($E_{(6-p)}$ jest grupą Euklidesa w $(6-p)$ -wymiarach) i są zadane równaniami (3.22-3.27) gdy $d + \tilde{d} = 8$ oraz $d = 1 + p$ co odpowiada 10-wymiarowej czasoprzestrzeni M_{10} . Współrzędne na M_{10} są oznaczone jako $X^M = (t, X^1, \dots, X^{6-p}, r, \varphi^1, \dots, \varphi^{p+2})$ gdzie φ parametryzują S^{p+2} . Wybieramy cechowanie w którym pole zanurzenia X D3-brany w M_{10} ma następującą postać:

$$X^M(\tau, \xi, \theta) = (t(\tau), \xi^1, \dots, \xi^n, X^{n+1}, \dots, X^{6-p}, r(\tau), \theta^1, \dots, \theta^{3-n}, \varphi^{9-n+1}(\tau), \dots, \varphi^{p+2}(\tau)), \quad (5.2)$$

gdzie ξ oraz θ są odpowiednio współrzędnymi na V_n oraz na sferze S^{3-n} . Działanie DBI dla takiego zanurzenia przyjmuje postać:

$$S = -T_3 \text{vol}(V_n) \int d\tau d^{3-n}\theta \left(e^{-\phi} \sqrt{-\det(\gamma_{\mu\nu})} - \delta_{3,p} A \dot{t} \right). \quad (5.3)$$

Kropka oznacza pochodną po czasie własnym τ . Indukowana metryka $\gamma_{\mu\nu}$ jest zadana związkami:

$$\gamma_{00} = -\Delta_+ \Delta_-^{-\frac{7-p}{8}} t^2 + \Delta_+^{-1} \Delta_-^{\frac{(3-p)^2}{2(1+p)} - 1} r^2 + r^2 h_{\hat{r}\hat{s}} \dot{\varphi}^{\hat{r}} \dot{\varphi}^{\hat{s}}, \quad (5.4)$$

$$\gamma_{ab} = \Delta_-^{\frac{1+p}{8}} \delta_{ab}, \quad \gamma_{\hat{a}\hat{b}} = r^2 h_{\hat{a}\hat{b}}, \quad (5.5)$$

gdzie $a, b = 1, \dots, n$, $\hat{a}, \hat{b} = 1, \dots, 3-n$ oraz $\hat{r}, \hat{s} = 3-n+1, \dots, p+2$. Współczynniki $h_{\hat{a}\hat{b}}$ i $h_{\hat{r}\hat{s}}$ są składowymi metryki h_{rs} ($r, s = 1, \dots, p+2$) na sferze S^{p+2} . Pole A jest składową pola cechowania tła: $A = A_{0\dots p}$ występującą w rozwiązaniu (3.13) oraz $F = dA$. Podstawiając (5.4) oraz (5.5) do (5.3) otrzymamy działanie z następującym Lagranżianem:

$$L = \text{vol}(S^{k-n}) \left(t^2 - \Delta_+^{-2} \Delta_-^{\frac{1-p}{1+p}} r^2 \right)^{1/2} r^{k-n} \Delta_+^{1/2} \Delta_-^{[5(1-p)+n(1+p)]/16} - \delta_{k,p} A w \dot{t}, \quad (5.6)$$

który prowadzi do następującego równania ruchu:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \left[1 - \frac{r^{2(k-n)} \Delta_+^{1/2} \Delta_-^{[5(1-p)+n(1+p)]/16}}{(E + \delta_{k,p} A w)^2} \text{vol}^2(S^{k-n}) \right] \Delta_+^2 \Delta_-^{-\frac{1-p}{1+p}}, \quad (5.7)$$

gdzie E jest stałą całkowania oraz $w = \int d^{3-n}\theta$. Powyższe równanie daje nam położenie r D3-brany w ustalonym tle jako funkcję czasu współrzędnościowego

t w M_{10} . Czas t oraz czas własny τ na D3-branie są związane w następujący sposób:

$$d\tau^2 = - \left(\Delta_+ \Delta_-^{-\frac{7-p}{8}} - \Delta_+^{-1} \Delta_-^{\frac{(3-p)^2}{2(1+p)}} r^{-2} - r^2 h_{\widehat{r}\widehat{s}} \dot{\varphi}^{\widehat{r}} \dot{\varphi}^{\widehat{s}} \right) dt^2. \quad (5.8)$$

Metryka indukowana przedstawiona w czasie własnym τ ma postać:

$$ds^2 = -d\tau^2 + e^{2\lambda} d\xi_a d\xi^a + e^{2\beta} h_{\widehat{a}\widehat{b}} d\theta^{\widehat{a}} d\theta^{\widehat{b}}, \quad (5.9)$$

gdzie $\exp 2\lambda = \Delta_-^{\frac{1+p}{8}}$, $\exp 2\beta = r^2$ oraz $r = r(\tau)$ i jest rozwiązaniem równania (5.7) wyrażonym w funkcji czasu τ . Jak można zauważyć (5.9) ma postać metryki typu Bianchi dla jednorodnej przestrzeni z dwoma czynnikami skali, które są zależne od czasu własnego τ . Czas ten dla obserwatora umieszczonego na D3-branie jest czasem kosmologicznym i taki obserwator może napisać równania ruchu dla tych czynników skali. Równania te są zadane przez teorię grawitacji Einsteina i zapisane w konforemnym czasie x_0 (związanym z τ przez relację $dx^0 = \exp(-\lambda) d\tau$) mają postać:

$$n(n-1)(\lambda')^2 + 2mn\lambda'\beta' + m(m-1)(\beta')^2 + e^{2\lambda-2\beta}\widetilde{R} = 16\pi G\widetilde{T}_{00}, \quad (5.10)$$

$$\left[2(1-m)\lambda'' - 2n\beta'' + 2n(2-m)\lambda'\beta' + (2n+m-m^2-2)(\lambda')^2 - n(n+1)(\beta')^2 - e^{2\lambda-2\beta}\widetilde{R} \right] \delta_{ab} = 16\pi G\widetilde{T}_{ab}, \quad (5.11)$$

$$e^{2\beta-2\lambda} \left[2(1-n)\beta'' - 2m\lambda'' + (2m-mn-n)\lambda'\beta' - m(m-1)(\lambda')^2 - n(n-1)(\beta')^2 \right] h_{\widehat{a}\widehat{b}} + 2 \left(\widetilde{R}_{\widehat{a}\widehat{b}} - \frac{1}{2}\widetilde{R}h_{\widehat{a}\widehat{b}} \right) = 16\pi G\widetilde{T}_{\widehat{a}\widehat{b}}, \quad (5.12)$$

prim oznacza pochodną po x_0 . Tensor Ricciego $\widetilde{R}_{\widehat{a}\widehat{b}}$ oraz skalar krzywizny \widetilde{R} są wyznaczone przez metrykę $h_{\widehat{a}\widehat{b}}$ oraz $m = 3 - n$. W równaniach tych zostały uwzględnione pola materii w objętości-świata, które są zadawane przez tensor energii-pędu $\widetilde{T}_{\mu\nu} = (\widetilde{T}_{00}, \widetilde{T}_{ab}, \widetilde{T}_{\widehat{a}\widehat{b}})$. Tensor ten jest zdefiniowany ze względu na metrykę (5.9) wyrażoną w konforemnym czasie x_0 i ma postać:

$$\widetilde{T}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (5.13)$$

gdzie \mathcal{L}_m jest gęstością Lagrażianu dla pól materii w objętości-świata. Używając związków $\lambda' = \exp(\lambda) d\lambda/d\tau$ i $\beta' = \exp(\lambda) d\beta/d\tau$ równanie (5.10) można przepisać jako:

$$n(n-1)H_1^2 + 2mnH_1H_2 + m(m-1)H_2^2 + e^{-2\beta}\widetilde{R} = 16\pi GT_{00}, \quad (5.14)$$

gdzie T_{00} jest gęstością energii wyrażoną w metryce (5.9). Związek między \tilde{T}_{00} oraz T_{00} jest następujący: $\tilde{T}_{00}e^{-2\lambda} = T_{00}$. Wielkości H_1 oraz H_2 są parametrami Hubbla: $H_1 = d\lambda/d\tau$, $H_2 = d\beta/d\tau$ dla obserwatora w objętości-świata D3-brany. Jawna postać tych parametrów jest następująca:

$$H_1 = \frac{(p+1)^2}{16} \cdot \frac{rr_-^{p+1}}{r^{p+1} - r_-^{p+1}} \frac{dr}{d\tau}, \quad H_2 = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau}. \quad (5.15)$$

Możemy utworzyć ich iloraz η , który mierzy anizotropie rozszerzania w kierunkach związanych z przestrzeniami V_n oraz S^{3-n} następnie przyjmujemy, że $r_- = r_+ = R$ (co oznacza, że Dp-brany tworzące tło są BPS) więc :

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{(p+1)^2}{16} \cdot \frac{r^2 R^{p+1}}{r^{p+1} - R^{p+1}} \equiv \eta(r). \quad (5.16)$$

Wartość tego ilorazu zależy od położenia D3-brany r , które jest rozwiązaniem równania (5.7).

Z drugiej strony wiadomo, że parametry H_1 oraz H_2 spełniają równanie (5.14) parametryzowane przez n . Dla kolejnych wartości n otrzymamy następujące równania:

dla $n = 0$:

$$H_2^2 + \frac{1}{6}e^{-2\beta}\tilde{R} = \frac{8\pi G}{3}T_{00}, \quad (5.17)$$

dla $n = 1$

$$H_2^2 + 2H_1H_2 + \frac{1}{2}e^{-2\beta}\tilde{R} = 8\pi GT_{00}, \quad (5.18)$$

dla $n = 2$

$$H_1^2 + 2H_1H_2 + \frac{1}{2}e^{-2\beta}\tilde{R} = 8\pi GT_{00}, \quad (5.19)$$

dla $n = 3$

$$H_1^2 = \frac{8\pi G}{3}T_{00}. \quad (5.20)$$

Równania. (5.17) oraz (5.20) są odpowiednio równaniami na β oraz λ i przedstawiają izotropową ewolucję objętości świata D3-brany. W pierwszym przypadku odpowiada to ewolucji 3-sfery a w drugim płaskiej przestrzeni. Równania (5.18) oraz (5.19) dają związki między H_1 i H_2 . Można zauważyć, że przypadki $n = 1$ oraz $n = 2$ są symetryczne tak, więc skupimy się na przypadku $n = 1$. Używając równań (5.16) oraz (5.18) dostaniemy:

$$H_2^2(1 + 2\eta) + \frac{1}{2}e^{-2\beta}\tilde{R} = 8\pi GT_{00}. \quad (5.21)$$

Wszystkie elementy powyższego równania są funkcjami r , który zależy od czasu t zgodnie z równaniem (5.7), które dla $r_- = r_+ = R$ ma postać:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left[1 - \frac{r^{2(3-n)}\Delta^{1/2+[5(1-p)+n(1+p)]/16}}{(E + \delta_{3,p}Aw)^2} \text{vol}^2(S^{3-n})\right] \Delta^{\frac{1+3p}{1+p}}. \quad (5.22)$$

Rozwiązania tego równania zależą między innymi od wymiaru p Dp-bran tworzących tło. Dlatego musimy rozpatrywać każdy wymiar p osobno. Chociaż w teorii typu IIB wymiary bran są nieparzyste rozpatrzmy również $p = 0$, które odpowiada D-cząstce.

Dla $p = 0$ (D-cząstka) otrzymamy następującą całkę:

$$\int \frac{\sqrt{r} dr}{\sqrt{r-R} \sqrt{1-r^{2(\alpha-\beta_0)}} (r-R)^{2\beta_0} \sigma_n^2} = t + t_0, \quad (5.23)$$

gdzie $\sigma_n^2 = (\text{vol}(S^{3-n})/E)^2$ oraz $\alpha = 3 - n$, $2\beta_0 = (13 + n)/16$. Liczba płaskich wymiarów $n = 0, 1, 2, 3$. Przypadki $n = 0$ oraz $n = 3$ odpowiadają jednemu parametrowi Hubble.

Dla $p = 1$ (D-struna) dostaniemy:

$$\int \frac{r^2 dr}{(r^2 - R^2) \sqrt{1-r^{2(\alpha-\beta_1)}} (r^2 - R^2)^{2\beta_1} \sigma_n^2} = t + t_0, \quad (5.24)$$

gdzie $2\beta_1 = (9 + 2n)/16$.

Dla $p = 3$:

$$\int \frac{r^5 dr}{(r^4 - R^4)^{5/4} \sqrt{1-r^{2(\alpha-\beta_3)}} \frac{(r^4 - R^4)^{2\beta_3}}{(E+Aw)^2} \text{vol}^2(S^{3-n})} = t + t_0, \quad (5.25)$$

gdzie $2\beta_3 = (2n - 1)/8$. W powyższych dwóch przypadkach $n = 0, 1, 2, 3$.

Dla $p = 5$:

$$\int \frac{r^8 dr}{(r^6 - R^6)^{4/3} \sqrt{1-r^{2(\alpha-\beta_5)}} (r^6 - R^6)^{2\beta_5} \sigma_n^2} = t + t_0, \quad (5.26)$$

gdzie $2\beta_5 = 3(n - 2)/8$ oraz liczba płaskich wymiarów $n = 0, 1$.

Powyższe całki są trudne do obliczenia w sposób analityczny. Można je oszacować gdy parametr E zmierza do nieskończoności (co oznacza, że $\sigma_n \rightarrow 0$). W takiej granicy wszystkie całki mają proste asymptotyki: $r \sim t$. Oznacza to, że D3-brana oraz Dp-brany tła tworzą układ niezwiązany. Więc z (5.16) otrzymamy wartości η dla dużych r :

$$\frac{H_1}{H_2} = \eta \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \begin{cases} \infty & p = 0 \\ R^2/4 & p = 1 \\ 0 & p > 1 \end{cases}. \quad (5.27)$$

W granicy dużego r i w tle produkowanym przez D1-brany równanie (5.21) przyjmuje postać:

$$H_2^2 \left(1 + \frac{1}{2} R^2\right) + \frac{1}{2} e^{-2\beta} \tilde{R} = 8\pi G T_{00}, \quad (5.28)$$

które dla $R = 2$ staje się równaniem Friedmmana ze stałą przestrzenią krzywizną $6\bar{R}$ to oznacza, że $H_1 = H_2$. Ponieważ R jest związany z ładunkiem i masą równaniami (3.26) i (3.28) to warunek $R = 2$ nakłada więz na ładunek topologiczny g_5 oraz na masę m_5 dualnych D5-bran do D1-bran. W rozważanym przypadku ($R = 2$) dostajemy wartości:

$$g_5 = 24\sqrt{2}\pi^2/\kappa, \quad (5.29)$$

$$m_5 = 24\pi^2/\kappa^2. \quad (5.30)$$

Ze związku (5.27) widać, że dla $p = 0$ ekspansja płaskich wymiarów jest o wiele szybsza niż wymiarów związanych ze sferą. Druga możliwość dla $p = 0$ jest taka, że $H_2 = 0$ co oznacza, że sfera nie podlega ekspansji. Kiedy $p > 1$ sfera ekspanduje szybciej niż płaska przestrzeń albo $H_1 = 0$ co oznacza, że płaska przestrzeń jest statyczna.

Rozpatrywany model jest przykładem "zabawkowego" modelu kosmologicznego. Obserwowana izotropowa ekspansja naszego wszechświata jest realizowana w tym modelu jako warunek na równość parametrów Hubble. Ten warunek nakład więz na dopuszczalne masy i ładunki D-bran tworzących tło. W naszym przypadku wartości ładunku i masy zostały otrzymane przy założeniu, że D3-brana ma topologię iloczynu kartezjańskiego n -wymiarowej płaskiej przestrzeni oraz $(3 - n)$ -wymiarowej sfery.

6 Zamknięte krzywe czasowe w teorii strun

W rozwiązaniach równań Ogólnej Teorii Względności (OTW) istnieją czasoprzestrzenie, które posiadają zamknięte krzywe czasowe (ZKC). Poruszając się po takiej krzywej wraca się do punktu wyjścia, zanim się wyruszyło w podróż. Dobrze znanym przykładem jest czasoprzestrzeń Gödla. Rozwiązania z ZKC są odrzucane, jako niefizyczne. Jednakże w samej strukturze ogólnej teorii względności (OTW) nie ma żadnego mechanizmu, który by zapobiegał tworzeniu się zamkniętych krzywych czasowych. Więc wydaje się, że odpowiednią teorią do rozpatrzenia zagadnień przyczynowości a dokładnie rozwiązań z ZKC jest teoria strun. Ponieważ z jednej strony struktura przyczynowa jest związana ze strukturą konforemną czasoprzestrzeni a z drugiej strony symetria konforemna na powierzchni świata struny jest podstawową symetrią to ta istniejąca analogia między strukturami konforemnymi może być przydatna w rozważaniach związanych z przyczynowością.

6.1 Struktura przyczynowa

Poniżej przedstawię pojęcia związane ze strukturą przyczynową [82], które zostaną później wykorzystane:

1. Mocna przyczynowość (mocna kauzalność): dla każdego punktu p należącego do czasoprzestrzeni M i każdego otoczenia O punktu p istnieje otoczenie V zawarte w O takie, że każda krzywa kauzalna (czasowa) przecina V dokładnie raz.

2. Stabilność kauzalna: czasoprzestrzeń (M, G) jest stabilna kauzalnie jeśli istnieje ciągle nieznikające czasowe pole wektorowe t takie, że czasoprzestrzeń M z metryką G nie ma zamkniętych krzywych czasowych. Stabilność kauzalna oznacza istnienie globalnej funkcji czasu na M .

Zamknięte krzywe czasowe pojawiają się w czasoprzestrzeniach, które są czasowo orientowalne. Czasowa orientowalność jest zadana przez określenie klas równoważności nie-przestrzennych wektorów na skierowane ku przyszłości i skierowane ku przeszłości. Sposób określenia tych klas jest zadany przez globalne pole wektorowe: $\tau = \tau^M \partial_M$. Nie-przestrzenny wektor $V = V^M \partial_M$ jest skierowany ku przyszłości jeśli:

$$G_{MN} V^M \tau^N < 0 \quad (6.01)$$

oraz skierowany ku przeszłości jeśli:

$$G_{MN} V^M \tau^N > 0. \quad (6.02)$$

Metryka G_{MN} ma sygnaturę $(-, +, \dots, +)$. Takie rozróżnienie przeszłości i przyszłości nie zależy od pola wektorowego τ i jest globalną cechą czasoprzestrzeni. ZKC jest czasową zamkniętą krzywą γ , której wektor styczny jest skierowany ku przyszłości:

$$G_{MN} \frac{dX^M}{d\sigma} \frac{dX^N}{d\sigma} < 0, \quad G_{MN} \tau^M \frac{dX^N}{d\sigma} < 0 \quad (6.03)$$

gdzie γ jest parametryzowana przez parametr $\sigma \in S^1$ oraz $\gamma(\sigma) = (X^M(\sigma))$. ZKC mogą istnieć tylko w czasoprzestrzeniach czasowo orientowalnych.

6.2 Model sigma w metrykach typu Gödla

Motywacja do rozpatrywania modelu sigma z metryką "targetu" typu Gödla wynika z dwóch następujących faktów:

1. 3-wymiarowa czasoprzestrzeń Gödla została otrzymana jako wynik owijania się M2 bran w strumieniowej kompaktifikacji M teorii [83]
2. 3-wymiarowa rodzina czasoprzestrzeni Gödla została otrzymana jako dokładne rozwiązanie grawitacji (w 2+1 wymiarach) sprzężonej z działaniem teorii Maxwella-Cherna-Simonsa (MCS) [84]. Jak się okazuje, teorie cechowania w trzech wymiarach z działaniem Cherna-Simonsa są realizowane na branach w teorii typu IIB [85, 86]. Ponieważ działanie dla grawitacji w 2+1 wymiarach jest również reprezentowane jako działanie Cherna-Simonsa więc otrzymane rozwiązania w [84] można traktować jako szczególny przykład teorii cechowania realizowanej na branie.

Co więcej metryki Gödla, które zostały otrzymane w [84] przechodzą w granicy w metrykę anty-de Sittera. W pracy [87] otrzymujemy związki łączące istnienie ZKC z warunkami, które muszą spełniać stałe sprzężenia k_i odpowiednich działań Cherna-Simonsa. W następnej części tej pracy rozpatruję model

sigma z metryką typu Gödla oraz deformacje konforemnej teorii pola (związanej z tym modelem sigma) przez dokładne marginalne operatory (exactly marginal operators). W wyniku tej operacji dostaje rodziny metryk "targetu", w których ZKC pozostają oraz rodziny metryk w których ZKC znikają. Struktura przy czynowa "targetu" jest zależna od operatorów konforemnej teorii pola. Podają warunki, które muszą spełniać parametry deformacji aby ZKC czasoprzestrzeni typu Gödla znikają w nowym "targecie".

Z modelem sigma można zwi azac 2-wymiarową konforemną teori  pola gdy dla pól "targetu" [rozmaitość M_n oraz pola (G_{MN}, B_{MN}, Φ) tworzą "target"] znikają odpowiednie funkcjonały β . Rodzina metryk, którą rozpatruj  jest zwi azana z dokładnymi marginalnymi operatorami 2-wymiarowej konforemnej teorii pola [88].

W konforemnym cechowaniu na powierzchni świata Σ_2 bozonowa cz eść dzia ania dla modelu sigma ma postac

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_2} d^2z (G_{MN} + B_{MN}) \partial X^M \bar{\partial} X^N + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_2} \Phi(X) R^{(2)} d^2z, \quad (6.1)$$

gdzie X jest odwzorowaniem z Σ_2 w rozmaitość M_n . Na M_n są określone pola: metryka G_{MN} , antysymetryczne pole B_{MN} oraz dylaton Φ . Krzywizna skalarna Σ_2 jest oznaczona przez $R^{(2)}$. W pracy [87] rozpatruj  metryk  G_{MN} , kt ora interpoluje metryk  Gödla i metryk  anty-de Sittera:

$$ds_\mu^2 = 4a^2 \{ -d\tau^2 + dr^2 + \sinh^2(r) [1 + (1 - \mu^2) \sinh^2(r)] d\phi^2 - 2\mu \sinh^2(r) d\tau d\phi \}, \quad (6.2)$$

μ jest parametrem interpolujacym. Dla $\mu = 1$ metryka jest anty-de Sittera a dla $\mu = 2$ metryka staje się metryk  Gödla. Gdy $\mu > 1$ w metryce (6.2) pojawiają się ZKC. Dzia anie (6.1) dla metryki (6.2) przyjmuje postac:

$$S[\tau, r, \phi] = \frac{4a^2}{2\pi} \int_{\Sigma_2} d^2z [-\partial\tau\bar{\partial}\tau + \partial r\bar{\partial}r + (\sinh^2(r) + (1 - \mu^2) \sinh^4(r)) \partial\phi\bar{\partial}\phi - \mu \sinh^2(r) (\partial\phi\bar{\partial}\tau + \bar{\partial}\phi\partial\tau)] + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_2} \Phi R^{(2)} d^2z. \quad (6.3)$$

W naszym przypadku rozmaitość M_3 jest 3-wywmiarowa i ma symetri  metryki (6.2) generowaną przez algebr  $so(2) \times sl(2, \mathbf{R})$. Jak można zauważyć (6.3) jest również niezmiennicze względem przesuni c w zmiennych τ i ϕ . Przesunięcia te tworzą 2-wymiarową abelową grup . Dzia anie (6.3) można przepisać jako:

$$S[\tau, r, \phi] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_2} d^2z \begin{pmatrix} \partial\tau & \partial\phi & \partial r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 4a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\partial}\tau \\ \bar{\partial}\phi \\ \bar{\partial}r \end{pmatrix} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_2} \Phi R^{(2)} d^2z, \quad (6.4)$$

gdzie macierz E jest równa:

$$E = 4a^2 \begin{pmatrix} -1 & -\mu \sinh^2 r \\ -\mu \sinh^2 r & u(r) \sinh^2 r \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

oraz $u(r) = 1 + (1 - \mu^2) \sinh^2 r$.

W przypadku gdy "target" posiada d abelowych izometrii to dokładne marginalne operatory odpowiadają jednoparametrowym podgrupą grupy $O(d, d, \mathbf{R})$. W naszym przypadku $d = 2$ więc grupa $O(2, 2, \mathbf{R})$ działa na pola "targetu" reprezentowane przez macierz $E = G + B$ w następujący sposób:

$$g(E) = (aE + b)(cE + d)^{-1}, \quad (6.6)$$

gdzie $g \in O(2, 2, \mathbf{R})$ oraz:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

macierze a, b, c i d spełniają relacje: $a^T d + c^T a = b^T d + d^T b = 0$, $a^T d + c^T b = I_2$. Maksymalnie zwartą podgrupą $O(2, 2, \mathbf{R})$ jest $O(2) \times O(2)$, która jest zanurzana w $O(2, 2, \mathbf{R})$ przez $e : O(2) \times O(2) \rightarrow O(2, 2, \mathbf{R})$ w następujący sposób:

$$e(r_1, r_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & r_1 - r_2 \\ r_1 - r_2 & r_1 + r_2 \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

gdzie $(r_1, r_2) \in O(2) \times O(2)$. Element $e(r_1, r_2)$ zależy od kątów α_1 i α_2 parametryzujących $(r_1(\alpha_1), r_2(\alpha_2))$ w sposób standardowy:

$$r_i(\alpha_i) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

gdzie $i = 1, 2$. Więc zanurzenie e przyjmuje postać:

$$e(r_1, r_2) = \begin{pmatrix} r(\alpha) \cos \beta & r(\alpha) \varepsilon \sin \beta \\ r(\alpha) \varepsilon \sin \beta & r(\alpha) \cos \beta \end{pmatrix} \equiv e_{(\alpha, \beta)}, \quad (6.10)$$

oraz: $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, $\beta = (\alpha_1 - \alpha_2)/2$, macierze $r(\alpha)$ i ε są równe:

$$r(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ i } \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Działanie tej maksymalnie zwartej grupy na E zależy od α i β i daje nową macierz \tilde{E} :

$$e_{(\alpha, \beta)}(E) \equiv \tilde{E} = r(\alpha) [E + \varepsilon \tan \beta] [\varepsilon E \tan \beta + I]^{-1} r^T(\alpha). \quad (6.12)$$

W rozpatrywanym przypadku otrzymujemy następujący wynik:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{11} &= W_\beta(r) [(1 - \mu^2) \sin^2 \alpha \sinh^4 r \\ &+ (\sin^2 \alpha - \mu \sin 2\alpha) \sinh^2 r - \cos^2 \alpha], \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{12} &= \frac{W_\beta(r)}{2} [(1 - \mu^2) \sin 2\alpha \sinh^4 r \\ &+ (\sin 2\alpha - 2\mu \cos 2\alpha) \sinh^2 r + \sin 2\alpha + 2\tilde{b}],\end{aligned}\quad (6.14)$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{21} &= \frac{W_\beta(r)}{2} [(1 - \mu^2) \sin 2\alpha \sinh^4 r \\ &+ (\sin 2\alpha - 2\mu \cos 2\alpha) \sinh^2 r + \sin 2\alpha - 2\tilde{b}],\end{aligned}\quad (6.15)$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{22} &= W_\beta(r) [(1 - \mu^2) \cos^2 \alpha \sinh^4 r \\ &+ (\cos^2 \alpha - \mu \sin 2\alpha) \sinh^2 r - \sin^2 \alpha],\end{aligned}\quad (6.16)$$

gdzie funkcje $W_\beta(r)$, $\tilde{b}(r)$ są równe:

$$\begin{aligned}W_\beta(r) &= \frac{4a^2(1 + \tan^2 \beta)}{1 - 4a^4 \tan^2 \beta \sinh^2(2r)}, \\ \tilde{b} &= \frac{1}{8} (1 + 4a^2 \sinh^2(2r)) \sin(2\beta).\end{aligned}\quad (6.17)$$

Z macierzy \tilde{E} otrzymujemy metrykę \tilde{G} :

$$\tilde{G}_{11} = \tilde{E}_{11}, \quad \tilde{G}_{22} = \tilde{E}_{22}\quad (6.18)$$

i

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{12}(\alpha, \beta) &= \frac{W_\beta(r)}{2} [(1 - \mu^2) \sin 2\alpha \sinh^4 r \\ &+ (\sin 2\alpha - 2\mu \cos 2\alpha) \sinh^2 r + \sin 2\alpha],\end{aligned}\quad (6.19)$$

oraz antysymetryczną dwu-formę \tilde{B} :

$$\tilde{B} = \frac{W_\beta(r)}{8} (1 + 4a^2 \sinh^2(2r)) \sin(2\beta) d\tau \wedge d\phi.\quad (6.20)$$

For $\alpha = \beta = 0$ we obtain the initial matrix E . The function $W_\beta(r)$ is finite for $\beta = \pi/2$ and has the value $W_{\pi/2}(r) = -a^{-2} \sinh^{-2}(2r)$. W przypadku, gdy $\mu^2 > 1$ składowe metryki \tilde{G}_{ab} przyjmują postać:

$$\tilde{G}_{11}(\alpha, \beta) = (\mu^2 - 1) W_\beta(r) h(R) \sin^2 \alpha,\quad (6.21)$$

$$\tilde{G}_{12}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} (\mu^2 - 1) W_\beta(r) g(R) \sin 2\alpha,\quad (6.22)$$

$$\tilde{G}_{22}(\alpha, \beta) = (\mu^2 - 1) W_\beta(r) f(R) \cos^2 \alpha,\quad (6.23)$$

gdzie:

$$h(R) = \left(\frac{1 - 2\mu \cot \alpha}{2(\mu^2 - 1)} \right)^2 - \frac{\cot^2 \alpha}{\mu^2 - 1} - \left(R - \frac{1 - 2\mu \cot \alpha}{2(\mu^2 - 1)} \right)^2, \quad (6.24)$$

$$g(R) = \left(\frac{1 - 2\mu \cot 2\alpha}{2(\mu^2 - 1)} \right)^2 - 1 - \left(R - \frac{1 - 2\mu \cot 2\alpha}{2(\mu^2 - 1)} \right)^2, \quad (6.25)$$

$$f(R) = \left(\frac{1 - 2\mu \tan \alpha}{2(\mu^2 - 1)} \right)^2 - \frac{\tan^2 \alpha}{\mu^2 - 1} - \left(R - \frac{1 - 2\mu \tan \alpha}{2(\mu^2 - 1)} \right)^2 \quad (6.26)$$

oraz $R = \sinh^2 r$. Można zauważyć, że dla $\alpha = \pi/2$ składowe metryki spełniają związki:

$$\tilde{G}_{11}(\pi/2, \beta) = \tilde{G}_{22}(0, \beta) = \frac{1}{4a^2} W_\beta(r) G_{22}, \quad (6.27)$$

$$\tilde{G}_{22}(\pi/2, \beta) = \tilde{G}_{11}(0, \beta) = \frac{1}{4a^2} W_\beta(r) G_{11}, \quad (6.28)$$

$$\tilde{G}_{12}(\pi/2, \beta) = -\frac{1}{4a^2} W_\beta(r) G_{12}. \quad (6.29)$$

To oznacza, że obrót o kąt $\alpha = \pi/2$ zamienia współrzędną czasową i przestrzenną. Ponieważ grupa $O(2) \times O(2)$ ma dwa generatory, więc dokładne marginalne operatory odpowiadają dwóm niezależnym jednoparametrem rodziną związanym z obrotami o kąt α i kąt β . Ta niezależność przejawia się w tym, że przetransformowane pola zależą od α i β w postaci iloczynów zależnych tylko od α albo od β .

W nowy "targocie" danym przez (6.20)-(6.23) ZKC pojawią się gdy \tilde{G}_{22} stanie się ujemne dla pewnego r oraz \tilde{G}_{11} pozostanie ujemne. Więc ZKC będzie istniała w dwóch przypadkach jeżeli:

1. $f(R) < 0$ oraz $W_\beta(r) > 0$, albo
2. $f(R) > 0$ oraz $W_\beta(r) < 0$

przy warunku: $\tilde{G}_{11} < 0$. Ten ostatni warunek prowadzi do: $W_\beta(r) < 0$ i $h(R) > 0$ albo $W_\beta(r) > 0$ i $h(R) < 0$. Funkcja $W_\beta(r)$ jest większa od zera jeśli zachodzi związek: $\sinh^2(2r) < (\cot^2 \beta) / (4a^2)$. Natomiast $f(R) > 0$ jeśli

$R \in (R_-^f, R_+^f) \equiv I^f$ gdzie krańce przedziału R_\pm^f są określone przez równość $f(R_\pm^f) = 0$:

$$R_\pm^f = \frac{1}{2(\mu^2 - 1)} \left(1 - 2\mu \tan \alpha \pm 2\sqrt{(\tan \alpha - \mu/2)^2 - (\mu^2 - 1)/4} \right). \quad (6.30)$$

Można zauważyć, że R_\pm^f są rzeczywiste jeśli $\tan \alpha \in (0, \nu_-/2] \cup [\nu_+/2, +\infty) \equiv D_f$ gdzie $\nu_\pm = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$. W przypadku, kiedy $\tan \alpha \in (\nu_-/2, \nu_+/2)$ funkcja $f(R)$ jest zawsze ujemna. W celu uproszczenia rachunków wybierzemy $\beta = \pi/2$. Dla innych wartości β jakościowy obraz rozważań pozostanie niezmienny. Tak, więc w naszym przypadku $W_{\pi/2}(r) < 0$ oraz ZKC istnieją wtedy gdy $f(R) > 0$ i $h(R) > 0$. Ostatnia nierówność jest spełniona dla $R \in (R_-^h, R_+^h) \equiv I^h$ gdzie:

$$R_\pm^h = \frac{1}{2(\mu^2 - 1)} \left(1 - 2\mu \cot \alpha \pm 2\sqrt{(\cot \alpha - \mu/2)^2 - (\mu^2 - 1)/4} \right) \quad (6.31)$$

oraz $h(R_\pm^h) = 0$. Krańce przedziału R_\pm^h są rzeczywiste jeśli $\tan \alpha \in (0, 2\nu_-] \cup [2\nu_+, +\infty) \equiv D_h$. dla $\tan \alpha \in (2\nu_-, 2\nu_+)$ funkcja $h(R)$ jest zawsze ujemna. Pierwiastki R_\pm^f i R_\pm^h są rzeczywiste gdy zachodzi związek:

$$\tan \alpha \in D_f \cap D_h = (0, \nu_-/2] \cup [\nu_+/2, 2\nu_-] \cup [2\nu_+, +\infty). \quad (6.32)$$

Wynika stąd, że ZKC istnieją jeśli:

$$I^f \cap I^h \neq \emptyset. \quad (6.33)$$

Powyższy związek jest prawdziwy jeśli istnieje takie $R_0 > 0$, że $f(R_0) = h(R_0) > 0$. Łatwo można znaleźć, że $R_0 = -(\mu \sin 2\alpha)^{-1}$ oraz, że α musi należeć do przedziału $\alpha \in (\pi/2, \pi)$. Wartość funkcji f w punkcie R_0 jest:

$$f(R_0) = \frac{1}{(\mu^2 - 1) \sin^2(2\alpha)} Z(\alpha), \quad (3.33)$$

gdzie:

$$Z(\alpha) = 4(\mu^3 - 1) \cos^4 \alpha - (\mu^2 - 1) \sin^4 \alpha - (4\mu \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \sin 2\alpha + \mu \sin^2(2\alpha) - \cos^2 \alpha \quad (6.34)$$

oraz $\alpha \in (\pi/2, \pi)$. Znak funkcji Z dla ustalonego α zależy od wartości μ .

Jako przykład rozpatrzmy metrykę Gödla ($\mu^2 = 2$). Funkcja $Z(\alpha)$ jest ujemna dla $\alpha \in [1.57, 1.8]$ (radiany) i staje się dodatnia dla $\alpha > 1.801$. Więc warunek $I^f \cap I^h \neq \emptyset$ przestaje być prawdziwy dla $\alpha \in [1.57, 1.8]$ a to oznacza, że ZKC znikają w nowym "targecie". Jednakże gdy $\alpha > 1.801$ ZKC przeżywają transformację. Jako następny przykład rozważmy, gdy $\mu^2 = (1.5)^2$. Funkcja $Z(\alpha)$ jest ujemna dla $\alpha \in [1.57, 1.67]$ więc ZKC również znikają w nowym "targecie". I przeżywają transformację dla $\alpha > 1.67$.

To oznacza, że transformacje z $O(2) \times O(2)$ zmieniają strukturę przyczynową i warunek (6.33) określa czy ZKC przeżyje w nowym "targecie".

6.3 Struktura przyczynowa i T-dualność

Transformacje T-dualności mieszają pola z sektora Neveu-Schwarza (NS) tworząc inny układ pól w którym propaguje się struna. Jednocześnie T-dualność jest symetrią teorii strun, więc w wyniku operacji T-dualności otrzymuje się nowy sektor pól NS. Sektor NS tworzy metryka G_{MN} , antysymetryczne pole B_{MN} oraz dylaton Φ . W pracach [89, 90] rozpatrzyłem rozwiązania typu pp-fal zależących od czasu i wpływ T-dualności na strukturę przyczynową pp-fal.

N -wymiarowe czasowo-zależne rozwiązanie pp-fali ma postać:

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- - K(x^+, x_I) (dx^+)^2 + \sum_{I=1}^{N-1} dx_I^2, \quad (6.35)$$

gdzie $x^\pm = (x_0 \pm x_N)/\sqrt{2}$ oraz $I = 1, \dots, N-1$. Jediną różną od zera składową tensora Ricciego R_{MN} dla metryki (6.35) jest:

$$R_{++} = \frac{1}{2} \partial_I^2 K. \quad (6.36)$$

Co więcej pp-fala jest dokładnym strunowym rozwiązaniem równań ruchu, które wynikają z konforemnej niezmienniczości. Pp-fal tworzą tło, w których α' poprawki w równaniach ruchu znikają.

Jeżeli tylko rozpatruje się pola z sektora NS (metryka G_{MN} , antysymetryczne pole B_{MN} oraz dylaton Φ) to warunek konforemnej niezmienniczości w teoriach typu II A/B przyjmuje postać równań ruchu:

$$R_{MN} = -2\nabla_M \nabla_N \Phi + \frac{1}{4} H_{MN}^2, \quad (6.37a)$$

$$\nabla_L (e^{-2\Phi} H_{MN}^L) = 0, \quad (6.37b)$$

$$\nabla^2 \Phi - 2(\nabla \Phi)^2 = -\frac{1}{12} H^2, \quad (6.37c)$$

gdzie $H_{MN}^2 = H_{MPR} H_N^{PR}$ oraz $H^2 = H_{MPR} H^{MPR}$.

Rozwiążemy powyższe równania ruchu przy założeniu, że metryka G_{MN} jest dana przez (6.35). Pole B_{MN} zależy od (x^+, x^I) oraz, że nie-zerowe składowe pola B to: $B_{I+}(x^+, x^J) \equiv B_I$. Dylaton Φ jest funkcją zależną od x^+ . Pole $H = dB$ dla takiego pola B ma składowe: $H_{IJ+} = \partial_I B_J - \partial_J B_I \equiv H_{IJ}$. Przy takich założeniach równanie (6.37c) staje się tożsamością (obydwie strony znikają) natomiast równania (6.37a-b) przyjmują postać:

$$\partial_I^2 K = -2\partial_+^2 \Phi + \frac{1}{4} H_{IJ} H^{IJ}, \quad (6.38)$$

$$\partial^I H_{IJ} = 0. \quad (6.39)$$

Podobne równania były rozwiązywane w pracy [91]. Następnie założymy, że funkcja K ma formę:

$$K(x_I, x^+) = \frac{1}{2} \sum_{I,J=1}^8 A_{IJ}(x^+) x_I x_J = \frac{1}{2} x^T A x, \quad (6.40)$$

macierz A jest symetryczna. Więc równanie (6.38) redukuje się do postaci:

$$Tr A = -2\partial_+^2 \Phi + \frac{1}{4} H_{IJ} H^{IJ}. \quad (6.41)$$

W przypadku gdy funkcja K zależy od $2n + 1 < 9$ zmiennych \tilde{x}_i (indeks $i = 1, \dots, 2n$) metryka (6.35) zapisuje się jako form:

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- - K(\tilde{x}_i, x^+) (dx^+)^2 + \sum_{i=1}^{2n} d\tilde{x}_i^2 + \delta_{ab} dx^a dx^b \quad (6.42)$$

gdzie $a, b = 1, \dots, 8 - 2n$ natomiast funkcja K jest w postaci:

$$K(\tilde{x}_i, x^+) = \sum_{i,j=1}^{2n} A_{ij}(x^+) \tilde{x}_i \tilde{x}_j, \quad (6.43)$$

która zależy od czasu x^0 poprzez x^+ . Zajmujemy się zagadnieniem: kiedy można usunąć x^+ z K przez lokalne ortogonalne transformacje $R(x^+)$ działające na współrzędnych. Ta transformacja jest dana przez macierz R w diagonalnej postaci: $R = \text{diag}(R_1, \dots, R_n)$ gdzie R_k jest:

$$R_k(x^+) = \begin{pmatrix} \cos \lambda_k x^+ & -\sin \lambda_k x^+ \\ \sin \lambda_k x^+ & \cos \lambda_k x^+ \end{pmatrix}. \quad (6.44)$$

Więc stare współrzędne \tilde{x}_i są związane z nowymi współrzędnymi x_i jak następuje:

$$\begin{pmatrix} \cos \lambda_k x^+ & -\sin \lambda_k x^+ \\ \sin \lambda_k x^+ & \cos \lambda_k x^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2k-1} \\ x_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{2k-1} \\ \tilde{x}_{2k} \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

oraz funkcja K przybiera postać:

$$K = x^T R^T A R x. \quad (6.46)$$

My poszukujemy takiej funkcji K , która nie zależy od x^+ . Ten warunek prowadzi do równania na macierz A :

$$\partial_+(R^T A R) = 0, \quad (6.47)$$

co oznacz, że:

$$\partial_+ A + [A, \Lambda] = 0, \quad (6.48)$$

gdzie macierz $\Lambda = \partial_+(R)R^T = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ oraz:

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_k \\ \lambda_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.49)$$

W rozpatrywanym przypadku $n = 1, 2, 3$. Przypadek $n = 1$ odpowiada płaskiej 6-wymiarowej wewnętrznej przestrzeni oraz 4-wymiarowej czasoprzestrzeni. Metryka w tym przypadku ma postać:

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- - K(\tilde{x}_i, x^+) (dx^+)^2 + \sum_{i=1}^2 d\tilde{x}_i^2 + \delta_{ab} dx^a dx^b, \quad a, b = 1, \dots, 6, \quad (6.50)$$

oraz $K(\tilde{x}_i, x^+) = \sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x^+) \tilde{x}_i \tilde{x}_j$. Równanie (6.48) dla $n = 1$ ma rozwiązanie ($\lambda_1 \equiv \lambda$):

$$A(x^+) = A_0 \begin{pmatrix} \sin(2\lambda x^+) & -\cos(2\lambda x^+) \\ -\cos(2\lambda x^+) & -\sin(2\lambda x^+) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_2 & c_1 \\ -c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad (6.51)$$

gdzie c_1, c_2, A_0 są stałymi całkowania. Parametr λ może być interpretowany jako prędkość kątowna 2-wymiarowej płaszczyzny $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ wokół prostopadłej osi. Równanie (6.41) dla rozwiązania (6.51) przyjmuje postać:

$$c_2 = -2\partial_+^2 \Phi + \frac{1}{4} H_{IJ} H^{IJ}. \quad (6.52)$$

Funkcja K we współrzędnych \tilde{x}_i jest równa:

$$K(\tilde{x}_i, x^+) = A_0 (\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2) \sin(2\lambda x^+) - 2A_0 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \cos(2\lambda x^+) + \frac{1}{2} c_2 (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2). \quad (6.53)$$

Natomiast transformacja R powoduje, że K w nowych współrzędnych x_i jest:

$$K(x_i) = \frac{1}{2} c_2 (x_1^2 + x_2^2) - 2A_0 x_1 x_2, \quad (6.54)$$

oraz metryka przyjmuje formę:

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- - [K(x_i) - \lambda^2 (x_1^2 + x_2^2)] (dx^+)^2 + \sum_{i=1}^2 dx_i^2 + 2\lambda (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) dx^+ + \delta_{ab} dx^a dx^b. \quad (6.55)$$

Przechodząc do współrzędnych biegunowych $x_1 = r \cos \phi, x_2 = r \sin \phi$ otrzymamy:

$$ds^2 = -2dx^+ dx^- - F(r, \phi) (dx^+)^2 + \lambda r^2 d\phi dx^+ + dr^2 + r^2 d\phi^2 + \delta_{ab} dx^a dx^b, \quad (6.56)$$

gdzie F jest dana przez:

$$F(r, \phi) = r^2 (\beta - A_0 \sin 2\phi), \quad (6.57)$$

i $\beta = c_2/2 - \lambda^2$. Metryka (6.55) może być rozpatrywana jako metryka 10-wymiarowej czasoprzestrzeni, która jest iloczynem kartezjańskim 4-wymiarowej pp-fali M_4 i 6-wymiarowej płaskiej przestrzeni T_6 .

Zakładając, że pole dylatonu Φ ma stałą wartość Φ_0 oraz, że pole B ma pierwszą "nogę" w T_6 oraz drugą "nogę" w M_4 i następnie, że pole B daje stałą wartość $H_{IJ} H^{IJ}$, otrzymujemy rozwiązanie równań (6.37a-c):

$$ds^2 = -(1 + F/2) dt^2 - F dt dy + (1 - F/2) dy^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda r^2 d\phi (dt + dy) + dr^2 + r^2 d\phi^2 + \delta_{ab} dx^a dx^b, \quad (6.58)$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 b_n \rho_n^2 d\alpha_n \wedge (dt + dy), \quad \Phi = \Phi_0 = \text{constant}, \quad (6.59)$$

oraz jest spełniony warunek:

$$c_2 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^3 b_n^2 > 0, \quad (6.60)$$

gdzie $H_{IJ}H^{IJ} = \sum_{n=1}^3 b_n^2$. W powyższych rozwiązaniach wprowadziliśmy współrzędne (t, r, ϕ, y) na czasoprzestrzeni M_4 oraz współrzędne biegunowe (ρ_n, α_n) w płaskiej przestrzeni T_6 : $x_{2n-1} = \rho_n \cos \alpha_n$, $x_n = \rho_n \sin \alpha_n$ gdzie $n = 1, 2, 3$.

Jak widać z równań (6.58- 6.59) istnieje wektor Killing $V = \partial_y$ taki, że: $L_V g = L_V H = L_V \Phi = 0$. Zkładając, że $y \in S^1$ (więc $y + 2\pi \simeq y$) możemy wykonać transformację T-dualności w tym kierunku. Korzystając z formuł Bushera otrzymujemy dualną 10-wymiarową czasoprzestrzeń \tilde{M} z dualną metryką \tilde{g} , dualnym polem \tilde{B} oraz dualnym dylatonem $\tilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= \frac{1}{1-F/2} (-dt^2 + dy^2) + \frac{\sqrt{2}\lambda r^2}{2-F} d\phi dt + \\ &\quad \frac{r^2}{4} \left(4 - \frac{r^2 \lambda^2}{2-F} \right) d\phi^2 + dr^2 + d\tilde{s}_6^2, \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\tilde{B} = \frac{F}{2-F} dt \wedge dy + \frac{\lambda r^2}{2-F} dy \wedge d\phi + \frac{1}{2-F} \sum_{n=1}^3 b_n \rho_n^2 d\alpha_n \wedge dy, \quad (6.62)$$

$$\tilde{\varphi} = \Phi_0 - \ln(1-F/2), \quad (6.63)$$

gdzie metryka $d\tilde{s}_6^2$ jest równa:

$$\begin{aligned} d\tilde{s}_6^2 &= \sum_{n=1}^3 \left[d\rho_n^2 + \frac{b_n^2 \rho_n^4}{2-F} d\alpha_n (dt + dy) + \rho_n^2 \left(1 + \frac{b_n^2 \rho_n^2}{2(2-F)} \right) d\alpha_n^2 \right] + \\ &\quad \frac{1}{2-F} \sum_{m \neq n}^3 b_m b_n \rho_m \rho_n d\alpha_m d\alpha_n. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Transformacja T-dualności miesza początkowo niezależną czasoprzestrzeń M_4 ze współrzędnymi (t, r, ϕ, y) z płaską przestrzenią T_6 ze współrzędnymi (x^1, \dots, x^6) . Jest to wynik tego, że pole B ma nietrywialną postać daną przez (6.59). Metrykę (6.61) można przepisać jako:

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= \frac{-1}{1-F/2} (dt - f^n d\alpha_n)^2 + \frac{1}{1-F/2} (dy + f^n d\alpha_n)^2 + \frac{\sqrt{2}\lambda r^2}{2-F} d\phi dt + \\ &\quad \frac{r^2}{4} \left(4 - \frac{r^2 \lambda^2}{2-F} \right) d\phi^2 + dr^2 + \sum_{n=1}^3 \left[d\rho_n^2 + \rho_n^2 \left(1 + \frac{b_n^2 \rho_n^2}{2(2-F)} \right) d\alpha_n^2 \right] + \\ &\quad \frac{1}{2-F} \sum_{m \neq n}^3 b_m b_n \rho_m \rho_n d\alpha_m d\alpha_n, \end{aligned} \quad (6.65)$$

gdzie $f^n = b_n^2 \rho_n^4 / 2$. 10-wymiarowa czasoprzestrzeń \widetilde{M} z powyższą metryką może być rozpatrywana jako rozwłóknienie z 9-wymiarową bazą \mathcal{B}_9 (ze współrzędnymi $(t, r, \phi, \rho_n, \alpha_n)$ oraz $n = 1, 2, 3$) i jednowymiarowym włóknem S^1 (ze współrzędną y):

$$S^1 (y) \hookrightarrow \begin{array}{c} \widetilde{M} \\ \downarrow \\ \mathcal{B}_9 (t, r, \phi, \rho_n, \alpha_n) \end{array} .$$

Tutaj jesteśmy zainteresowani 4-wymiarową czasoprzestrzenią \widetilde{M}_4 , którą można wybrać z tego rozwłóknienia. Wybierzemy \widetilde{M}_4 przez ustalenie trzech ρ_n i trzech α_n . W wyniku tego otrzymamy \widetilde{M}_4 jako rozwłóknienie nad bazą \mathcal{B}_3 :

$$S^1 (y) \hookrightarrow \begin{array}{c} \widetilde{M}_4 \\ \downarrow \\ \mathcal{B}_3 (t, r, \phi) \end{array}$$

Stąd metryka $d\widetilde{s}_4^2$, pole $\widetilde{B}_{(4)}$ oraz dylaton $\widetilde{\varphi}$ na \widetilde{M}_4 mają postać:

$$d\widetilde{s}_4^2 = \frac{2}{2-F} (-dt^2 + dy^2) + \frac{\sqrt{2}\lambda r^2}{2-F} d\phi dt + \frac{r^2}{4} \left(4 - \frac{r^2 \lambda^2}{2-F} \right) d\phi^2 + dr^2, \quad (6.66)$$

$$\widetilde{B}_{(4)} = \frac{F}{2-F} dt \wedge dy + \frac{\lambda r^2}{2-F} dy \wedge d\phi, \quad (6.67)$$

$$\widetilde{\varphi} = \Phi_0 - \ln(1 - F/2). \quad (6.68)$$

Powyższa metryka zależy istotnie od znaku $(2 - F)$. Obszar gdzie $2 - F > 0$ jest wyznaczony przez warunek: $2(\beta - A_0 \sin 2\phi)^{-1} > r^2 \geq 0$ przy założeniu, że $\beta > A_0 \geq 0$.

Zgodnie z warunkiem (6.03) ZKC pojawi się w kierunku ϕ jeśli będą zachodziły nierówności:

$$\frac{\sqrt{2}\lambda r^2}{2-F} > 0, \quad \text{and} \quad 4 - \frac{r^2 \lambda^2}{2-F} < 0. \quad (6.69)$$

Rozwiązania tych nierówności zależą od parametrów c_2, A_0 oraz λ i dają następujące ograniczenia na r^2 :

$$\frac{2}{\beta - A_0 \sin 2\phi} > r^2 > \frac{2}{(\lambda/2)^2 + \beta - A_0 \sin 2\phi}. \quad (6.70)$$

W obszarze gdzie $2 - F < 0$ czasowa współrzędna t staje się przestrzenną współrzędną natomiast przestrzenna współrzędna y staje się czasową współrzędną.

Obszar, w którym następuje zamiana ról t i y nazwiemy $\widetilde{D}_+ = \left\{ r^2 > 2(\beta - A_0 \sin 2\phi)^{-1} \right\}$.

W \tilde{D}_+ metryka ma postać:

$$d\tilde{s}_4^2 = \frac{2}{|2-F|} dt^2 - \frac{2}{|2-F|} dy^2 - \frac{\sqrt{2}\lambda r^2}{|2-F|} d\phi dt + \frac{r^2}{4} \left(4 + \frac{r^2\lambda^2}{|2-F|} \right) d\phi^2 + dr^2. \quad (6.71)$$

Oznacza to, że w \tilde{D}_+ nie istnieją ZKC.

Warunek (6.70) określa obszar D_0 gdzie znajdują się ZKC. Tak, więc w współrzędnych biegunowych (r, ϕ) obszar D_0 jest ograniczony przez dwie elipsy $E_{\max}(a_{\max}, b_{\max})$ oraz $E_{\min}(a_{\min}, b_{\min})$. Posiadają one wspólny środek i ich główne osie a_{\max} , b_{\max} oraz a_{\min} , b_{\min} są równoległe i obrócone o kąt $\pi/4$ względem osi biegunowej. Osie główne tych elips są dane przez związki:

$$a_{\max}^2 = \frac{2}{\beta - A_0}, \quad b_{\max}^2 = \frac{2}{\beta + A_0} \quad (6.72)$$

oraz

$$a_{\min}^2 = \frac{2}{\alpha - A_0}, \quad b_{\min}^2 = \frac{2}{\alpha + A_0}, \quad (6.73)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia $\alpha = \beta + (\lambda/2)^2 = c_2/2 - 3\lambda^2/4 > \beta$.

Ażeby uprościć rachunki założymy, że $A_0 = 0$. W tym przypadku D_0 staje się w płaszczyźnie (r, ϕ) pierścieniem ograniczonym przez dwa okręgi o promieniach $r_-^2 = 2/\alpha$ i $r_+^2 = 2/\beta$. Pola tła przyjmują postać:

$$d\tilde{s}_4^2 = g_0(-dt^2 + dy^2) + 2g_{0\phi}d\phi dt + g_\phi d\phi^2 + dr^2, \quad (6.74)$$

$$\tilde{B}_{(4)} = (g_0 - 1) dt \wedge dy + \lambda r^2 g_0 dy \wedge d\phi, \quad (6.75)$$

$$\tilde{\varphi} = \Phi_0 + \ln g_0 \quad (6.76)$$

gdzie: $g_0 = 1/(1 - r^2/r_+^2)$, $g_{0\phi} = \sqrt{2}\lambda r^2/4(1 - r^2/r_+^2)$ i $g_\phi = r^2(1 - r^2/r_-^2)/(1 - r^2/r_+^2)$. W pracy [90] uogólniłem te rozwiązania. Płaszczyzna (r, ϕ) dzieli się na trzy części: $D_- \cup D_0 \cup D_+$ gdzie D_- , D_0 i D_+ są zdefiniowane w następujący sposób:

$$D_- = \{g_0 > 0 \text{ i } g_\phi > 0 | r \in [0, r_-]\} \times [0, 2\pi], \quad (6.77)$$

$$D_0 = \{g_0 > 0 \text{ i } g_\phi < 0 | r \in (r_-, r_+)\} \times [0, 2\pi], \quad (6.78)$$

$$D_+ = \{g_0 < 0 \text{ i } g_\phi > 0 | r \in (r_+, +\infty)\} \times [0, 2\pi]. \quad (6.79)$$

Promienie r_- i r_+ są wrazone przez strumień pola H (związany z c_2 przez (6.60)) oraz przez λ :

$$r_- = \frac{2}{\sqrt{c_2 - 3\lambda^2/2}}, \quad r_+ = \frac{2}{\sqrt{c_2 - 2\lambda^2}}. \quad (6.80)$$

Następnie rozpatrzmy dwie granice pól (6.74 - 6.76).

1. Gdy $r_+ \rightarrow \infty$ współczynnik metryki $g_0 = 1$ oraz dylaton jest stały. Metryka i pole $\tilde{B}_{(4)}$ przyjmują postać:

$$d\tilde{s}_4^2 = -dt^2 + dy^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda r^2 d\phi dt + r^2(2 - \alpha r^2) d\phi^2 + dr^2, \quad (6.81)$$

$$\tilde{B}_{(4)} = \lambda r^2 dy \wedge d\phi, \quad (6.82)$$

gdzie $\alpha = c_2/2 - 3\lambda^2/3$. W tej granicy $\beta = 0$ co odpowiada związkowi: $\sum_{n=1}^3 b_n^2 = 8\lambda^2$, który może być interpretowany jako warunek na równowagę pomiędzy siłą przyciągającą generowaną przez H oraz siłą odśrodkową związaną z prędkością kątową λ . Taka równowaga jest cechą charakterystyczną czasoprzestrzeni typu Gödla. W tej granicy istnieją ZKC, które dają o sobie znać gdy $r^2 > r_-^2 = 2/\alpha$. Horyzont, poza którym pojawiają się ZKC jest wyznaczony przez r_-^2 .

2. Gdy $\lambda \rightarrow 0$ więc $r_0 \equiv r_- = r_+ = 2/\sqrt{c_2}$. Metryka oraz pola $\tilde{B}_{(4)}$ $\tilde{\varphi}$ przyjmują postać:

$$d\tilde{s}_4^2 = \frac{-dt^2 + dy^2}{1 - r^2/r_0^2} + r^2 d\phi^2 + dr^2, \quad (6.83)$$

$$\tilde{B}_{(4)} = \frac{r^2}{r_0^2 - r^2} dt \wedge dy + \frac{\lambda r^2}{2\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)} dy \wedge d\phi, \quad (6.84)$$

$$\tilde{\varphi} = \Phi_0 - \ln\left(1 - r^2/r_0^2\right). \quad (6.85)$$

Jak widać w tej czasoprzestrzeni ZKC znikają. Jednakże pojawia się horyzont zadany przez r_0 .

Otrzymana T-dualna metryka (6.66) i jej uproszczona forma (6.74) posiada dwa horyzonty h_- dla $r = r_-$ i h_+ dla $r = r_+$. Pierwszy horyzont h_- jest związany ze strukturą przyczynową, natomiast drugi h_+ jest związany z osobliwościami metryki i pozostałych pól na h_+ .

Tensor krzywizny $R_{\nu\rho\sigma}^\mu$ dla metryki (6.83) ma następujące składowe:

$$R_{rtr}^t = R_{yry}^r = -\frac{1}{r_0^2} \frac{1 + 2r^2/r_0^2}{\left(1 - r^2/r_0^2\right)^2}, \quad (6.86)$$

$$R_{yty}^t = -\frac{r^2/r_0^4}{\left(1 - r^2/r_0^2\right)^2}, \quad (6.87)$$

$$R_{\phi t\phi}^t = R_{y\phi y}^\phi = -\frac{1}{r_0^2} \frac{1}{1 - r^2/r_0^2}. \quad (6.88)$$

Więc niezmiennik krzywizny $I_1 = 1/2 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ jest równy:

$$I_1 = \frac{1}{2r_0^4} \frac{\left(1 + 2r^2/r_0^2\right)^2}{\left(1 - r^2/r_0^2\right)^2} + \dots \quad (6.89)$$

co oznacza, że horyzont h_+ zadany przez r_0 jest rzeczywistą osobliwością krzywizny.

W pierwszym przypadku, gdy $r_+ \rightarrow \infty$ horyzont h_+ jest przesunięty do nieskończoności i zostaje otrzymana czasoprzestrzeń typu Gödla z osobliwościami przyczynowymi w postaci ZKC. Z drugiej strony gdy dwa horyzonty h_- i h_+ zlewają się ze sobą ($\lambda \rightarrow 0$) tworząc nowy horyzont h_0 ZKC znikają, jednakże pojawia się osobliwość krzywizny na nowo powstałym horyzoncie. Analizując równania geodezyjnych [89] otrzymałem trzy rodzaje geodezyjnych, których własności zależą od związków między r_- i r_+ , czyli od geometrii czasoprzestrzeni. Niektóre z tych geodezyjnych nigdy nie przekroczą pierwszego horyzontu h_- czyli nigdy nie wejdą w obszar osobliwości przyczynowo-skutkowych.

Otrzymane przeze mnie T-dualne pola są podwójnie osobliwe: osobliwości przyczynowe w postaci ZKC i osobliwość pól na h_+ . Jedne z tych osobliwości mogą być usunięte w odpowiednich granicach, jednakże nie można ich usunąć jednocześnie. Ponieważ T-dualne pola zostały otrzymane z porządnym rozwiązaniem w formie pp-fali, można wysnuć wniosek, że T-dualność łączy rozwiązania, które są osobliwe w nisko-energetycznym przybliżeniu z rozwiązaniami nie posiadającymi osobliwości. T-dualność jednej strony można uważać, jako metodę generowania rozwiązań a z drugiej strony, jako symetrię teorii strun. Oznacza to, że osobliwości czasoprzestrzeni są pozorne w tym sensie, że wykonując operacje T-dualności otrzymuje się "porządną" czasoprzestrzeń. Dla fizyki struny niskoenergetyczne osobliwości nie istnieją.

7 Możliwe fakty obserwacyjne i podsumowanie

W dwóch rejonach w obserwowanym wszechświecie efekty strunowe mogą być dostrzeżone: początki wszechświata, gdzie efekty kwantowej grawitacji muszą być uwzględnione, oraz obecne doświadczenia dotyczące zderzeń cząstek. Obydwa te obszary charakteryzują się wysokimi energiami. W najnowszym eksperymencie LHC, będzie możliwa obserwacja efektów związanych z produkcją czarnych dziur, o ile istnieją dodatkowe wymiary.

W mikrofalowym promieniowaniu tła powinny być odcisnięte efekty, mówiące o strunowej naturze świata (o ile teoria struny jest prawdziwa). Efekty te są związane z możliwością istnienia jednowymiarowych rozciągniętych obiektów (strun kosmicznych) we wczesnym Wszechświecie [82, 56, 57]. Wykrycie strun kosmicznych, pozwoliłoby na przetestowanie różnych teorii inflacji mających źródła w teorii struny.

Praca ta dotyczy potencjalnych zastosowań superstrunowych rozwiązań w kosmologii. Jednakże aby te zastosowania były realistyczne, należy przejść kilka etapów. Jednym z nich to stabilizacja modułów, która jest konieczna w celu uzyskania jakiegokolwiek realistycznej 4-wymiarowej teorii. Następnym etapem jest odpowiednia definicja D-brany. Tutaj została wykorzystana definicja w niskoenergetycznym przybliżeniu, w którym D-branę identyfikuje się z podrozmaitością, do której przyczepione są końce struny otwartej. Jednakże, taki obraz brany jest niepełny, nie istnieje bowiem jak dotąd dokładna definicja brany w

kwantowym reżimie oraz gdy efekty strunowe są nie do pominięcia. Niemniej, stosując takie przybliżenie, udało się otrzymać wyniki związane z samą ewolucją D3-brany zanurzonej w 10-wymiarowej czasoprzestrzeni, której geometria jest wyznaczona przez rozwiązania strunowe. Zakładając, że Model Standardowy jest uwięziony na D3-branie, można myśleć o niej jako o modelu wszechświata. Z danych obserwacyjnych wynika, że Model Standardowy opisuje ok. 4% zawartości Wszechświata, reszta zaś jego zawartości, tj. tzw. ciemna materia (ok. 22%) i ciemna energia (ok. 74%), jest nieznanego rodzaju. O ciemnej materii wiadomo, że jest ona zlokalizowana w galaktykach. Co do ciemnej energii wiadomo tylko, że powinna wypełniać cały Wszechświat.

Wyniki, które otrzymałem w [62, 65, 67, 76, 81] odnoszą się zarówno do klasycznej jak i kwantowej ewolucji D3-brany, w szczególności do interpretacji zjawisk widocznych dla znajdującego się w objętości-świata D3-brany - obserwatora, który jednakże nie wie o tym, że jest otoczony przez wyżejwymiarową przestrzeń. Dla takiego modelu otrzymałem funkcję falową D3-brany przy założeniu jedno-rodnej i izotropowej objętości-świata. Postać funkcji falowej zależy od położenia D3-brany w ustalonym tle. Następnie otrzymałem prawdopodobieństwo tunelowania od rozmiarów Planckowskich do rozmiarów większych niż długość Plancka. Potencjał, przez który następuje tunelowanie, powoduje nieuchronną ekspansję objętości-świata D3-brany. W obszarze klasycznym bowiem, dla dużych rozmiarów przestrzennych, taki potencjał prowadzi do przyspieszonej ekspansji. W przypadku, gdy nie jest spełniony warunek BPS, otrzymałem parametry opisujące inflację jako funkcję pola tachionowego oraz jego potencjału. Wyprowadziłem również związek pomiędzy polem tachionu a jego potencjałem (rów. 2.54). W klasycznym reżimie w przypadku statycznym D3-brany otrzymałem stałą kosmologiczną jako efektywny parametr na jej objętości świata, a w dynamicznym przypadku równanie stanu dla egzotycznej materii, która może modelować ciemną energię, odpowiedzialną za coraz szybszą ekspansję wszechświata. Rozpatrzyłem, również różne scenariusze związane z ewolucją D3-brany i otaczającą ją przestrzenią [67]. Jednym z rozwiązań, które tam otrzymałem, jest 4-wymiarowa czasoprzestrzeń de Sittera. W [81] rozpatrzyłem związek między parametrami Hubble na D3-branie, które opisują różne prędkości ekspansji w zależności od kierunku, oraz charakterystykami geometrii tła. Z warunku równości parametrów Hubble, otrzymałem warunki na ładunki topologiczne oraz masę D5-bran tworzących tło.

W pracach [87,89 i 90] rozpatrywałem zagadnienie przyczynowości a mianowicie istnienie zamkniętych krzywych czasowych w nisko-energetycznych rozwiązaniach struny. Stosując deformację w modelu sigma przez marginalne operatory otrzymałem warunek mówiący, kiedy ZKC przeżyją taką operację, tzn., kiedy zdeformowany "target" będzie przyczynowo-skutkowy. Następnie używając T-dualności otrzymałem z czasoprzestrzeni w formie pp-fali czasoprzestrzeń, gdzie występują osobliwości przyczynowe w postaci ZKC w ograniczonym obszarze oraz osobliwości krzywizny. Wyniki ten reprezentują w konkretnej postaci stwierdzenie: symetrie struny (w tym wypadku T-dualność) usuwają nisko-energetyczne osobliwości.

8 Literatura

- [1] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Vol. 1& 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [2] J. Polchinski, *String Theory*, Vol. 1& 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [3] B. Zwiebach, *A first course in string theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [4] P. K. Townsend, *Four lectures on M-theory*, hep-th/9612121.
- [5] J. H. Schwarz, *Lectures on superstring and M theory dualities*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 55B (1997) 1 hep-th/9607201.
- [6] A. Sen, *An introduction to non-perturbative string theory*, hep-th/9802051.
- [7] N. A. Obers and B. Pioline, *U-duality and M-theory*, Phys. Rept. 318 (1999) 113, hep-th/9809039.
- [8] E. Kiritsis, *Supersymmetry and duality in field theory and string theory*, hep-ph/9911525.
- [9] F. Denef, M. R. Douglas, B. Florea, *Building a Better Racetrack*, JHEP 0406 (2004) 034, 11, hep-th/0404257.
- [10] S. Kachru, M. B. Schulz and S. Trivedi, *Moduli stabilization from fluxes in a simple IIB orientifold*, JHEP 0310 (2003) 007 , hep-th/0201028.
- [11] J. Louis and A. Micu, *Type II theories compactified on Calabi-Yau three-folds in the presence of background fluxes*, Nucl. Phys. B 635 (2002) 395 , hep-th/0202168.
- [12] A. Buchel, *On effective action of string theory flux compactifications*, Phys.Rev. D69 (2004) 106004 , hep-th/0312076.
- [13] S. Kachru and A. K. Kashani-Poor, *Moduli potentials in type IIA compactifications with RR and NS flux*, JHEP 0503 (2005) 066 , hep-th/0411279.
- [14] S. Ashok, M. R. Douglas, *Counting flux vacua*, JHEP 0401 (2004) 060, hep-th/0307049
- [15] F. Denef, M. R. Douglas, *Distributions of flux vacua*, JHEP 0405 (2004) 072, hep-th/0404116
- [16] T. Eguchi, Y. Tachikawa, *Distribution of Flux Vacua around Singular Points in Calabi-Yau Moduli Space*, JHEP 0601 (2006) 100, hep-th/0510061
- [17] E. Witten, *Non-Perturbative Superpotentials In String Theory*, Nucl. Phys. B 474 (1996) 343, hep-th/9604030.
- [18] J. A. Harvey and G. W. Moore, *Superpotentials and membrane instantons*, hep-th/9907026.
- [19] P. Berglund and P. Mayr, *Non-perturbative superpotentials in F-theory and string duality*, hep-th/0504058.
- [20] M. Dine, R. Rohm, N. Seiberg and E. Witten, *Gluino Condensation In Superstring Models*, Phys. Lett. B 156 (1985) 55.
- [21] C. P. Burgess, J. P. Derendinger, F. Quevedo and M. Quiros, *On gaugino condensation with field-dependent gauge couplings*, Annals Phys. 250 (1996) 193, hep-th/9505171.

- [22] L. Görlich, S. Kachru, P. K. Tripathy and S. P. Trivedi, *Gaugino condensation and nonperturbative superpotentials in flux compactifications*, hep-th/0407130.
- [23] R. Blumenhagen, M. Cvetič, F. Marchesano and G. Shiu, *Chiral D-brane models with frozen open string moduli*, JHEP 0503 (2005) 050, hep-th/0502095.
- [24] P. K. Tripathy and S. P. Trivedi, *D3 brane action and fermion zero modes in presence of background flux*, hep-th/0503072.
- [25] J. Polchinski, *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges*, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 4724, hep-th/9510017.
- [26] E. G. Gimon and J. Polchinski, *Consistency Conditions for Orientifolds and DManifolds*, Phys. Rev. D 54 (1996) 1667, hep-th/9601038.
- [27] J. Polchinski, *Lectures on D-branes*, hep-th/9611050, .
- [28] C. P. Bachas, *Lectures on D-branes*, hep-th/9806199.
- [29] C. V. Johnson, *D-brane primer*, hep-th/0007170.
- [30] E. Kiritsis, *D-branes in standard model building, gravity and cosmology*, Fortsch. Phys. 52 (2004) 200 hep-th/0310001.
- [31] A. M. Uranga, *Chiral four-dimensional string compactifications with intersecting D-branes*, Class. Quant. Grav. 20, S373 (2003), hep-th/0301032.
- [32] D. Lüst, *Intersecting brane worlds: A path to the standard model?*, Class. Quant. Grav. 21 (2004) S1399, hep-th/0401156.
- [33] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon And Flatness Problems*, Phys. Rev. D 23, 347 (1981), A. D. Linde, *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems*, Phys. Lett. B 108, 389 (1982), A. Linde, *Prospects of inflation*, hep-th/0402051, A. Aguirre, *Eternal Inflation, past and future*, arXiv:0712.0571
- [34] V. Balasubramanian, *Accelerating universes and string theory*, Class. Quant. Grav. 21 (2004) S1337 hep-th/0404075.
- [35] C. P. Burgess, *Inflationary String Theory?*, hep-th/0408037.
- [36] K. Hori, A. Iqbal, C. Vafa, *D-Branes And Mirror Symmetry*, hep-th/0005247
- [37] S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde, S. P. Trivedi, *de Sitter Vacua in String Theory*, Phys. Rev. D68 (2003) 046005, hep-th/0301240.
- [38] S. B. Giddings, S. Kachru and J. Polchinski, *Hierarchies from fluxes in string compactifications*, Phys. Rev. D 66 (2002) 106006,
- [39] S. Sethi, C. Vafa and E. Witten, *Constraints on Low-Dimensional String Compactifications*, Nucl. Phys. B480 (1996) 213, hep-th/9606122
- [40] K. Dasgupta, G. Rajesh and S. Sethi, *M Theory, Orientifolds and G-Flux*, JHEP08(1999) 023, hep-th/9908088
- [41] H. Abe, T. Higaki, T. Kobayashi, *Moduli-mixing racetrack model*, Nucl.Phys. B742 (2006) 187-207, hep-th/0512232
- [42] J.J. Blanco-Pillado, C.P. Burgess, J.M. Cline, C. Escoda, M. Gomez-Reino, R. Kallosh, A. Linde, F. Quevedo, *Inflating in a Better Racetrack*, JHEP 0609 (2006) 002, hep-th/0603129v2
- [43] G. Dvali, Q. Shafi, S. Solganik, *D-brane Inflation*, hep-th/0105203v1

- [44] A. Avgoustidis, D. Cremades, F. Quevedo, *Wilson Line Inflation*, hep-th/0606031
- [45] J. Garcia-Bellido, R. Rabadan, F. Zamora, *Inflationary scenarios from branes at angles* JHEP01(2002)036
- [46] N. Jones, H. Stoica, S. H. H. Tye, *Brane Interaction as the Origin of Inflation*, JHEP07(2002)051
- [47] M. Gomez-Reino, I. Zavala, *Recombination of Intersecting D-Branes and Cosmological Inflation* JHEP09(2002)020
- [48] C. Herdeiro, S. Hirano, R. Kallosh, *String Theory and Hybrid Inflation/Acceleration*, JHEP12(2001) 027, hep-th/0110271
- [49] J. P. Hsu, R. Kallosh, S. Prokushkin, *On Brane Inflation With Volume Stabilization*, JCAP12(2003)009, hep-th/0311077
- [50] F. Koyama, Y. Tachikawa, T. Watari, *Supergravity Analysis of Hybrid Inflation Model from D3–D7 System* hep-th/0311191
- [51] J. P. Hsu, R. Kallosh, *Volume Stabilization and the Origin of the Inflation Shift Symmetry in String Theory*, JHEP04(2004)042, hep-th/0402047
- [52] K. Dasgupta, J. P. Hsu, R. Kallosh, A. Linde, M. Zagermann, *D3/D7 Brane Inflation and Semilocal Strings*, JHEP08(2004)030, hep-th/0405247
- [53] P. Chen, K. Dasgupta, K. Narayan, M. Shmakova, M. Zagermann, *Brane Inflation, Solitons and Cosmological Solutions: I*, JHEP09(2005)009, hep-th/0501185
- [54] L. McAllister, *An Inflation Mass Problem in String Inflation from Threshold Corrections to Volume Stabilization*, JCAP02(2006)010, hep-th/0502001
- [55] H. Firouzjahi, S. H. H. Tye, *Closer towards inflation in string theory*, Phys. Lett. (2004) B 584 147, hep-th/0312020
- [56] S. E. Shandera, S. H. H. Tye, *Observing Brane Inflation*, hep-th/0601099
- [57] S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde, J. Maldacena, L. McAllister, S. P. Trivedi, *Towards Inflation in String Theory*, JCAP 0310 (2003) 013, hep-th/0308055
- [58] M. Alishahiha, E. Silverstein, D. Tong, *DBI in the Sky*, Phys.Rev. D70 (2004) 123505, hep-th/0404084
- [59] X. Chen, *Inflation from Warped Space*, JHEP 0508 (2005) 045, hep-th/0501184
- [60] D. Cremades, F. Quevedo, A. Sinha, *Warped Tachyonic Inflation in Type IIB Flux Compactifications and the Open-String Completeness Conjecture*, JHEP 0510 (2005) 106, hep-th/0505252
- [61] D. J. Schwarz, C. A. Terrero-Escalante, A. A. Garcia, *Higher order corrections to primordial spectra from cosmological inflation*, Phys.Lett. B517 (2001) 243, astro-ph/0106020
- [62] P. Gusin, *Inflation conditions for non-BPS D-branes*, J. Phys. A 40 (2007) 6985
- [63] A. Sen, *Supersymmetric world-volume action for non-BPS D-branes*, JHEP **9910** (1999) 008, hep-th/9909062.
- [64] D.A.Steer, F.Vernizzi, *Tachyon inflation: tests and comparison with single scalar field inflation*, Phys.Rev. D70 (2004) 043527, hep-th/0310139.

- [65] P. Gusin, J. Warczewski, *D-brane worlds and the cosmological constant*, Mod.Phys. Lett.A 21 (2006) 213-229
- [66] M. J. Duff, R. R. Khuri, J. X. Lu, *String solitons*, hep-th/9412184 ; M. J. Duff, *Supermembranes*, hep-th/9611203
- [67] P. Gusin, J. Warczewski, *Evolution of the D3-brane for dynamical embeddings*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol.4, No. 2 (2007) 285-295
- [68] U. Lindström, R. von Unge, *A Picture of D-branes at Strong Coupling*, Phys.Lett. B403 (1997) 233-238, hep-th/9704051; R. Kallosh, *Covariant quantization of D-branes*, Phys.Rev. D56 (1997) 3515-3522, hep-th/9705056; K. Kamimura and M. Hatsuda, *Canonical formulation of IIB D-branes*, Nucl. Phys. B527 (1998) 381, hep-th/9712068; E. Bergshoeff, P.K. Townsend, *SuperD-branes revisited*, Nucl. Phys. B531 (1998) 226-238, hep-th/9804011.
- [69] C. Bachas, M. Porrati, *Pair creation of open strings in an electric field*, Phys. Lett. B296 (1992) 77, hep-th/9209032 ; C. Bachas, *D-brane dynamics*, Phys.Lett. B374 (1996) 37.
- [70] D. Kastor, J. Traschen, *Cosmological Multi-Black Hole Solutions*, Phys.Rev. D47 (1993) 5370, hep-th/9212035.
- [71] G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope, *Brane Worlds in Collision*, hep-th/0501117.
- [72] J. B. Hartle, S. W. Hawking, *Wave function of the Universe*, Phys. Rev.D28 (1983) 2960-2974,
- [73] S. W. Hawking, *The Quantum state of the Universe*, Nucl. Phys.B239 (1984) 257-276
- [74] H. Ooguri, C. Vafa, E. Verlinde, *Hartle-Hawking Wave-Function for Flux Compactifications: The Entropic Principle*, Lett.Math.Phys. 74 (2005) 311-342, hep-th/0502211,
- [75] S. Sarangi, S. H. H. Tye, *The Boundedness of Euclidean Gravity and the Wavefunction of the Universe*, hep-th/0505104
- [76] P. Gusin, *Wheeler-De Witt equation for brane gravity*, Phys. Rev. D 77, 066017 (2008)
- [77] M.Abou-Zeid, C. M. Hull, *Geometric Actions for D-Branes and M-Branes*, Phys. Lett. B428 (1998) 277, [hep-th/9802179] ; M. Abou Zeid, *Actions for Curved Branes*, hep-th/0001127.
- [78] G. T. Horowitz, A. Strominger, *Black strings and P-branes*, Nucl. Phys. **B360** (1991) 197
- [79] U. Gen, M. Sasaki, *False Vacuum Decay with Gravity in Non-Thin-Wall Limit*, Phys.Rev. D61 (2000) 103508, gr-qc/9912096
- [80] J. B. Hartle, S. W. Hawking, *Wave function of the universe*, Phys. Rev.D28 (1983) 2960
- [81] P. Gusin, *Anisotropic evolution of a D-brane*, CEJP (2009) arXiv:0905.0759
- [82] J. Beem, P. Ehrlich, *Global Lorentzian Geometry*, New York, 1981
- [83] T. S. Levi, J. Raeymaekers, D. Van den Bleeken, W. Van Herck, B. Vercnocke, *Godel space from wrapped M2-branes*, JHEP 1001:082, (2010), [arXiv:0909.4081].
- [84] M. Banados, G. Barnich, G. Compere, A. Gomberoff, *Three dimensional*

origin of Gödel spacetimes and black holes, Phys.Rev. D73 (2006) 044006, [hep-th/0512105].

[85] T. Kitao, K. Ohta and N. Ohta, *Three-dimensional gauge dynamics from brane configurations with (p,q) -fivebrane*, Nucl. Phys. B 539, 79 (1999) [arXiv:hep-th/9808111].

[86] O. Bergman, A. Hanany, A. Karch and B. Kol, *Branes and supersymmetry breaking in 3D gauge theories*, JHEP 9910, 036 (1999) [arXiv:hep-th/9908075].

[87] P. Gusin, *Causal Transformation of Gödel-Type Spacetimes in Conformal Field Theory*, Mod. Phys. Lett. A, Vol. 25, No. 34 (2010) pp. 2873-2884.

[88] D. Israel, *Quantization of heterotic strings in a Gödel/Anti de Sitter spacetime and chronology protection*, JHEP 0401, 042 (2004), [arXiv: hep-th/0310158].

[89] P. Gusin: Bounded region with closed time-like curves in T-dual pp-waves backgrounds, Cent. Eur. J. Phys. 10(4), (2012), 836-845.

[90] P. Gusin : Universe with closed time-like curves in a bounded region in T-dual pp-waves backgrounds, AIP Proc. 1514 (2013) 47-50.

[91] M. Blau, M. O'Loughlin, G. Papadopoulos and A.A. Tseytlin, *Solvable models of strings in homogeneous plane wave backgrounds*, Nucl. Phys. B673 (2003) 57-97, [arXiv: hep-th/0304198].