# Efektywne dynamiki kwantowych półgrup dynamicznych

Piotr Ługiewicz

Streszczenie rozprawy habilitacyjnej

Współczesna teoria kwantowa wymaga ciągle zbudowania właściwego aparatu matematycznego lub właściwego użycia już istniejących narzędzi matematyki współczesnej. Jednym z wielu ważnych aspektów budowy matematycznej teorii kwantowej, podjętym w badaniach prezentowanych w tej rozprawie, jest zagadnienie budowy modeli, w ramach których można by wyjaśnić mechanizm prowadzący od dynamiki obiektów kwantowych podlegających równaniom Schrödingera do dynamiki makro-obiektów wyznaczonej przez równania Newtona. Matematyczna natura dynamiki Schrödenigera i dynamiki Newtona jest skrajnie odmienna. W rozprawie jako podstawa do połączenia obydwu światów, klasycznego Newtona i kwantowego Schrödingera, zostało użyte zjawisko dekoherencji.

Wyjaśnieniu mechanizmu dekoherencji poświęcono wiele uwagi na gruncie matematycznych badań poczynając od prac von Neumanna z lat trzydziestych ubiegłego stulecia. Za podstawową przyczynę trudności dynamicznego wywołania zjawiska dekoherencji można wskazać matematyczną własność hamiltonowskiej dynamiki, która przeprowadza stany czyste w stany czyste. Rozwiązanie, które zostało szeroko zaakceptowane i również zaadoptowane w tej rozprawie, podał Żurek w latach osiemdziesiątych ubiegłego wieku. Żurek analizował schemat von Neumanna opisujący działanie urządzenia pomiarowego $\mathcal{A}$ dokonującego pomiaru obserwabli $S$ na układzie $\mathcal{S}$ znajdującym się początkowo w stanie opisywanym pewną funkcją falową. Pierwszy etap procesu pomiaru zwany często *przedpomiarem* polega na formowaniu korelacji kwantowych między urządzeniem pomiarowym $\mathcal{A}$ a obiektem $\mathcal{S}$ poddawanym pomiarowi przy początkowym braku korelacje między $\mathcal{A}$ i $\mathcal{S}$. Drugi etap, nierealizowalny w ramach formalizmu hamiltonowskiego, jest często nazywany *redukcją pakietu falowego* i odnosi się do przejścia od stanu będącego superpozycją stanów do mieszaniny statystycznej stanów, czyli tzw. *procesu dekoherencji.* Żurek zwrócił uwagę, że schemat von Neumanna jest niepełny, gdyż w istocie nie można jednoznacznie przypisać urządzeniu $\mathcal{A}$ wielkości fizycznej, którą ma ono mierzyć w przeciwieństwie do rzeczywistych urządzeń pomiarowych. Tym samym urządzenie $\mathcal{A}$ po procesie przedpomiaru według Żurka ciągle pozostaje po stronie świata kwantowego i nie przybliża nas do zrozumienia procesu redukcji paczki falowej.

Przedstawione przez Żurka rozwiązanie uzupełnia wyżej opisaną lukę zawartą w procesie przedpomiaru, ale jednocześnie podaje mechanizm redukcji pakietu falowego: przyrząd pomiarowy, to nie tylko układ kwantowy $\mathcal{A}$ ale układ złożony $\mathcal{A}' = \mathcal{A}+\mathcal{E}$, gdzie jego część $\mathcal{E}$ jest umownie nazywana *środowiskiem*. Wydaje się być rzeczą naturalną, że urządzenie pomiarowe składa się z części mającej „bezpośrednią styczność" z układem mierzonym $\mathcal{S}$. Ta część układu bezpośrednio „pobiera informację" o stanie początkowym układu mierzonego nie zaburzając jej. Tym elementem jest kwantowy podukład $\mathcal{A}$ całego urządzenia $\mathcal{A}'$. O przekazie jakiej informacji będzie pośredniczyła część $\mathcal{A}$, decyduje część $\mathcal{E}$, przy czym część $\mathcal{E}$ oddziałuje jedynie z częścią $\mathcal{A}$ bez bezpośredniego wpływania części $\mathcal{E}$ na układ mierzony $\mathcal{S}$. Jednocześnie część $\mathcal{E}$ podlega całkowitej ignorancji w czasie pomiaru. Matematycznie oznacza to, że należy dokonać uśrednienia względem ignorowanego stanu „środowiska", co prowadzi nas do odejścia od dynamiki schrödingerowskiej do pewnej złożonej dynamiki efektywnej, w ramach której pojawia się możliwość uzyskania ewolucji prowadzącej do procesu redukcji pakietu falowego.

Przedstawiony sposób modelowania zjawiska dekoherencji opiera się na pragmatycznym założeniu, że jedynie częściowa informacja dotycząca dynamiki całego układu jest dla nas w praktyce dostępna. W układzie jako całości obowiązuje dynamika hamiltonowska i dekoherencja nie występuje. Dlatego też mówi się czasem o pozornej dekoherencji, która nabiera charakter obiektywny.

Ogólnie, w złożonych układach kwantowych często wyróżnia się część zwaną „środowiskiem" i część zwaną „układem", i gdzie w centrum zainteresowania jest jedynie ewolucja w czasie tylko tej drugiej części. Tę drugą część często będziemy nazywali *układem otwartym.* Ewolucja układu otwartego otrzymana jak wyżej w schemacie Żurka jest w ogólności bardzo złożoną ewolucją. W szeregu sytuacji można uzyskać łatwiejsze w analizie dynamiki poprzez procedury konstruowania specjalnych przybliżeń. Dochodzi się w ten sposób do pojęcia *kwantowej półgrupy dynamicznej* na algebrach *obserwabli.* Krótko przytoczymy te pojęcia. Algebry obserwabli matematycznie opisywane są przez $C^*$-algebry $\mathfrak{M}$. Każdą algebrę $\mathfrak{M}$ z inwolucją $^*$, która jest jednocześnie przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|$ taką, że $\|x^*x\| = \|x\|^2$ dla każdego $x \in \mathfrak{M}$ nazywamy *$C^*$-algebrą.* W większości przypadków będziemy przyjmowali, że algebra jest wyposażona w element jedynkowy, tj. taki element algebry $\mathfrak{M}$, który będziemy oznaczać przez $\mathbf{1}$, że $\mathbf{1}x = x$ dla każdego $x \in \mathfrak{M}$.

Element $x \in \mathfrak{M}$ nazwiemy *dodatnim*, co będziemy zapisywać $x \in \mathfrak{M}_+$, jeśli $x = yy \equiv y^2$ dla pewnego elementu $y \in \mathfrak{M}$ takiego, że $y^* = y$. Każdy element algebry spełniający ostatnią z wymienionych równości będziemy nazywać *hermitowskim* lub *rzeczywistym*. Dla dwóch elementów rzeczywistych $x$, $y$ powiemy, że $x$ jest *większy* od $y$ ($y$ *mniejszy* od $x$), co będziemy zapisywać $x \geq y$ (odpowiednio $y \leq x$), jeśli $x - y \in \mathfrak{M}_+$.
Niech $P_t$, $t \geq 0$ jest rodziną ciągłych w normie algebry odwzorowań liniowych $\mathfrak{M}$ w $\mathfrak{M}$, które są takie, że $P_t \circ P_s = P_{t+s}$ dla każdej pary $t, s \geq 0$, przy czym $P_0$ jest odwzorowaniem identycznościowym. Ponadto każdy z operatorów $P_t$ zachowuje $\mathbf{1}$, tj. element jedynkowy algebry $\mathfrak{M}$, tzn. zachodzi $P_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ dla $t > 0$. Przy dodatkowych warunkach ciągłości można uzyskać lokalny opis półgrupy $\{P_t\}_{t\geq 0}$ przy pomocy generatora. Dlatego też rozważa się następujące typy regularności dla półgrup. Niech $\mathfrak{M}^*$ jest przestrzenią złożoną z ciągłych w normie funkcjonałów liniowych na algebrze $\mathfrak{M}$. Półgrupę $\{P_t\}_{t\geq 0}$ nazywa się:
a) *silnie ciągłą*, jeśli $\|P_t x - x\| \to 0$ dla $t \to 0^+$ przy dowolnym wyborze $x \in \mathfrak{M}$; $\|\cdot\|$ oznacza normę algebry $\mathfrak{M}$
b) *słabo ciągłą* jeśli $\eta(P_t x) \to \eta(x)$ dla $t \to 0^+$ przy dowolnym wyborze $x \in \mathfrak{M}$ oraz $\eta \in \mathfrak{M}^*$
c) $*$-*ciągłą* jeśli $\eta(P_t x) \to \eta(x)$ dla $t \to 0^+$ przy dowolnym wyborze $x \in \mathfrak{M}$ oraz $\eta \in \mathfrak{N}$, gdzie przyjmuje się, że istnieje przestrzeń predualna $\mathfrak{N}$, tzn. taka przestrzeń Banacha, że $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{M}$.
Jeśli będziemy mówili o półgrupie $*$-słabo ciągłej, to zawsze będziemy zakładać dodatkowo, że każdy z operatorów $P_t$ jest ciągły w $*$-topologii na $\mathfrak{M}$, tzn. najsłabszej topologi, w której wszystkie funkcjonały $\eta \in \mathfrak{N}$ są ciągłe. Będziemy też zamiennie używać terminu $\sigma$-słabo ciągłej półgrupy i odpowiednio $\sigma$-słabej topologii. Algebry von Neumanna, o których będzie mowa w dalszej części rozprawy, są przykładami $C^*$-algebr, dla których są spełnione warunki opisane w punkcie c) powyżej.
Ostatnim elementem wchodzącym w pojęcie kwantowych półgrup dynamicznych, które przedyskutujemy, jest pojęcie dodatniości. Wyróżniamy kilka typów dodatniości. Wszystkie one pokrywają się w przypadku algebr przemiennych. Powiemy, że półgrupa $\{P_t\}_{t\geq 0}$ jest dodatnia w określonym sensie, jeśli każde z odwzorowań $P_t$ jest dodatnie w wymienionym sensie. Niech dalej $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ jest zbiorem wszystkich zespolonych macierzy o rozmiarze $n \times n$. I tak powiemy, że $P_t$ jest:
a) *dodatni*, jeśli $P_t(x^*x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathfrak{M}$
b) *dodatni w sensie Schwarza*, jeśli $P_t x^* P_t x \leq P_t(x^*x)$ dla każdego $x \in \mathfrak{M}$
c) $n$-*dodatni*, jeśli $P_t \otimes \mathrm{id}\colon \mathfrak{M} \otimes \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{M} \otimes \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ jest dodatni
d) *kompletnie dodatni*, jeśli $P_t$ jest $n$-dodatni przy każdym $n = 1, 2, \ldots.$
Kompletna dodatniość implikuje $n$-dodatniość, $n$-dodatniość (przy $n \geq 2$)

implikuje dodatniość w sensie Schwartza, i w końcu dodatniość w sensie Schwartza pociąga za sobą dodatniość. Powiemy, że półgrupa $\{P_t\}_{t\geq 0}$ jest *kompletnie dodatnia* (odpowiednio: *n-dodatnia*, *typu Schwarza*, itp.) jeśli każdy z operatorów $P_t$, $t > 0$ jest kompletnie dodatni (odpowiednio: $n$-dodatni, dodatni w sensie Schwarza, itp.).
Warto nadmienić, że kompletna dodatniość jest naturalnym wymogiem dla półgrup opisujących dynamikę otwartych układów kwantowych.
Półgrupę $\{P_t\}_{t\geq 0}$ operatorów liniowych działających na $C^*$-algebrze, które zachowują jedynkę algebry, nazwiemy *kwantową półgrupą dynamiczną*, jeśli jest silnie albo $*$-słabo ciągła i jest przynajmniej 2-dodatnia. W przypadku półgrup na algebrach von Neumanna będziemy zawsze wybierali wariant $*$-słabo ciągłej półgrupy. Każdy operator $P$ określony na $C^*$-algebrze, który posiada cechy operatorów wchodzących w skład kwantowych półgrup dynamicznych, będziemy często nazywać *operatorem markowskim.* Operatory markowskie są przykładem odwzorowań *zwężających* w normie algebry, tzn. takich, że $\|P(x)\| \leq \|x\|$ dla każdego $x \in \mathfrak{M}$. Będziemy rozważać operatory, które są zwężające w normach różnych od normy algebry.
W rozprawie również rozważano *nieliniowe półgrupy Markowa na $C^*$-algebrach*, tj. półgrupy operatorów nieliniowych zachowujących wszystkie istotne własności kwantowych półgrup dynamicznych. To pojęcie jest jednak bardziej złożone i zostanie omówione szerzej w dalszej części.
Zamiast terminu „kwantowe półgrupy dynamiczne” będziemy również używać zamiennie terminu *kwantowe półgrupy Markowa.* Nazwa „kwantowe półgrupy dynamiczne”, dla wygody sformułowań, również będzie się odnosiła do półgrup nieliniowych. Przy czym z kontekstu będzie jasno wynikało, z jakim typem półgrup mamy do czynienia, o ile to rozróżnienie będzie istotne.

**Ogólnikowy opis badań podjętych w rozprawie**

Zasadniczym przedmiotem rozprawy jest analiza dotycząca długoczasowego zachowania dynamicznych półgrup kwantowych oparta wyłącznie na ścisłych wynikach matematycznych. Po części pytanie tak postawione nie jest niczym nowym. Badanie tzw. ergodyczności półgrup markowskich jest wręcz jednym z klasycznych zagadnień nie tylko w fizyce, ale w samej matematyce zwłaszcza, jeśli chodzi o tzw. półgupy Markowa na przestrzeniach funkcyjnych. Ideę stawianego tam pytania można by określić głównie jako badanie istnienia pewnego podzbioru niezmienniczych elementów dla rozważanej dynamiki oraz sposobu dochodzenia dowolnie wybranych danych początkowych poddanych zadanej dynamice do elementów niezmienniczych. W szczególności w centrum uwagi jest przypadek, kiedy taki zbiór jest jednoelementowy. Taka sytuacja odpowiada w opisie świata fizykalnego np. pewnemu stanowi równowagi, który jest opisywany tymże elementem niezmienniczym. Mówi się wówczas, że dana dynamika opisuje sposób dochodzenia układu fizycznego do stanu równowagi. Podjęty kierunek badań prezentowany w przedstawianej rozprawie różni się od wyżej wspomnianego tym, że w centrum zainteresowania badań są postawione dynamiki indukowane przez wyjściową dynamikę na jej zbiorze niezmienniczym, przy jednoczesnym wystąpieniu okoliczności matematycznych uznanych za istotne poprzez to, że wyróżniają dynamikę na zbiorze niezmienniczym tym samym dyskredytując ewolucję na pozostałej części zbioru. W takim przypadku będziemy zbiór niezmienniczy nazywać *zbiorem efektywnych stopni swobody* a samą dynamikę na tym zbiorze *dynamiką efektywną*. Całość nazywamy *efektywnym układem dynamicznym*. Prezentowany matematyczny schemat odzwierciedla istotę sytuacji, jakie spotykamy w świecie fizykalnym, gdzie często opisujemy zjawiska w oparciu o częściowe, efektywne informacje i obserwacje danego układu. Rozważanie danej dynamiki jako efektywnej dynamiki łączy się więc z rozbudowywaniem wyjściowej teorii fizycznej do nowej teorii opisującej w jednej całości większą liczbę aspektów lub połączeniem istniejących dwóch odmiennych teorii dotyczących opisu świata fizykalnego, jak np. to ma miejsce w przypadku teorii klasycznej i kwantowej, gdzie przy użyciu zjawiska dekoherencji [1] udało się, przynajmniej na poziomie konceptualnym, wskazać na matematyczną możliwość współistnienia opisu typu newtonowskiego i kwantowego w ramach jednej teorii:

> *ewolucja o charakterze klasycznym jest efektywną dynamiką pewnej ewolucji kwantowej układu otwartego.*

W ogólności efektywna dynamika może mieć charakter dynamiki kwantowej, opisywanej teorią schrödingerowską ale również jest możliwy charakter losowy takiej dynamiki, który jest opisywany procesami Markowa. Ten ostatni typ zachowań był przedmiotem badań w literaturze. Z badaniem efektywnych dynamik można łączyć nadzieję na rozwój teorii pomiaru, w szczególności z dynamikami będącymi ciągłymi łańcuchami Markowa.

Prezentowane w rozprawie modele efektywnych układów dynamicznych indukowanych przez kwantowe półgrupy opisujące ewolucję na algebrach operatorowych stanowią niewątpliwie pierwsze kroki na drodze rozwoju tej dziedziny badań matematycznych. Programem badań objęte są nie tylko liniowe a również nieliniowe półgrupy dynamiczne.

[1] reprezentujące wyróżnioną okoliczność matematyczną - wyżej wymienioną przy definicji efektywnego układu dynamicznego

**Szczegółowy skrócony opis badań**

Przedmiotem badań matematycznych są kwantowe półgrupy dynamiczne posiadające niezmienniczy stan $\phi$ (w ogólności wagę): $\{T_t;\ t \geq 0\}$ określona na algebrze obserwabli $\mathfrak{M}$, $T_t : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$. Myślą przewodnią jest badanie istnienia rozkładu algebry obserwabli $\mathfrak{M}$ generowanego przez dynamikę kwantowej półgrupy dynamicznej. Elementy składowe takiego rozkładu opisać można w następujący sposób podany poniżej. Wyjściowa algebra obserwabli ma rozkład w postaci sumy prostej przestrzeni Banacha $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \bigoplus \mathfrak{M}_2$. Podprzestrzeń liniowa $\mathfrak{M}_1$ jest ponownie pewną algebrą obserwabli a podprzestrzeń linowa $\mathfrak{M}_2$ zachowuje inwolucję algebry $\mathfrak{M}$. Rozkład ten jest taki, że obie wskazane podprzestrzenie są niezmiennicze ze względu na działanie operatorów markowskich $T_t$, dla każdego $t \geq 0$. Projektor $P : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}_1$ jest wartością oczekiwaną. Ponadto odwzorowanie $T_{1|t} \equiv T_t\lceil_{\mathfrak{M}_1}: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_1$ dla każdego $t \geq 0$ jest $*$-izomorfizmem algebry $\mathfrak{M}_1$ i półgrupa $\{T_{1|t}\}_{t\geq 0}$ może zostać rozszerzona do grupy: $T_{1|-t} \equiv T_{1|t}^{-1}$ dla każdego $t > 0$ ($T^{-1}$ jest odwzorowaniem odwrotnym odwzorowania $T$).

Istotą opisywanego rozkładu jest to, że ma miejsce następujące tłumienie dynamiki elementów algebry $\mathfrak{M}$ wybranych poza $\mathfrak{M}_1$, tzn. dokładniej: dla każdego normalnego funkcjonału liniowego $\eta$ z $\mathfrak{M}_*$ [2] i każdego elementu $x \in \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{C}$ zachodzi: $\eta(T_t x) \longrightarrow 0$ gdy $t \to +\infty$. $\mathfrak{C}$ jest pewną $C^*$-algebrą, która jest gęsta (w $\sigma$-słabej topologii). W przypadku, gdy waga $\phi$ jest stanem na algebrze $\mathfrak{M}$ albo jest poczynione odpowiednie dodatkowe założenie o relatywnej zwartości półgrupy predualnej, to wówczas: $\eta(T_t x) \longrightarrow 0$ gdy $t \to +\infty$ przy dowolnym wyborze $x \in \mathfrak{M}_2$ oraz $\eta \in \mathfrak{M}_*$.

W przypadku algebr obserwabli, które są algebrami skończonego typu można wzmocnić szereg własności matematycznych opisywanego rozkładu. I tak, np. projektor $P : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}_1$ jest warunkową wartością oczekiwaną zachowującą ślad. Odwzorowanie $T_{1|t} \equiv T_t\lceil_{\mathfrak{M}_1}: \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \mathfrak{M}_1$ dla każdego $t \geq 0$ zachowuje ślad. Ma miejsce wzmocnione tłumienie dynamiki elementów algebry $\mathfrak{M}$ wybranych poza $\mathfrak{M}_1$, tzn.: dla każdego normalnego funkcjonału liniowego $\omega$ z $\mathfrak{M}_*$ i każdego elementu $x \in \mathfrak{M}_2$ zachodzi: $\omega(T_t x) \longrightarrow 0$ gdy $t \to +\infty$. Jeśli dodatkowo algebra $\mathfrak{M}_1$ jest maksymalną algebrą samosprzężoną to wówczas dynamika $\{T_{1|t}\}_{t\in\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych) jest $*$-izomorficzna z dynamiką na algebrze $L^\infty[0,1]$ z miarą Lebesgue'a zadaną przez mierzalny potok $\Phi_t : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $t \in \mathbb{R}$ zachowujący miarę Lebesgue'a. Dokładniej przez formułę: $x \in L^\infty[0,1] \longrightarrow x_t \in L^\infty[0,1]$, gdzie $x_t(s) = x(\Phi_t(s))$ dla $s \in [0,1]$.

Szybki zanik do zera wartości oczekiwanych może oznaczać z praktycznego punktu widzenia nieosiągalność dla eksperymentu obserwabli wybranych z

[2] w przypadku, gdy algebra obserwabli jest zadana przez pewną algebrę von Neumanna

$\mathfrak{M}_2$, jednocześnie taki rozkład wyznacza obserwable z $\mathfrak{M}_1$ jako jedyne efektywnie osiągalne w obserwacjach (efektywna algebra obserwabli). Możemy mówić, reasumując, że dynamika kwantowa efektywnie może być widziana jako dynamika klasyczna.

Jeden z podstawowych modeli indukowania klasycznej dynamiki przez kwantową półgrupę, który można zbudować dla algebr skończonego typu jest następujący. Rozważa się faktor generowany przez algebrę Glimma $\mathcal{A}$ w jej śladowej reprezentacji GNS: $\mathfrak{M} = \pi_{\omega_0}(\mathcal{A})''$. Skonstruowana dynamika na $\mathfrak{M}$ ma postać

$$\frac{d}{dt}x = \delta(x) + L_0(x) = \mathbf{i}[H, x] + L_0(x) \qquad (\mathbf{i}^2 = -1) \tag{1}$$

gdzie derywacja $\delta$ generuje $\sigma$-słabą jednoparametrową grupę $*$-automorfizmów algebry $\mathfrak{M}$ oraz $L_0$ jest dyssypatywną częścią dynamiki. Oba składowe elementy opisane są poniżej.

**1.** Niech $D_n$ oznacza algebrę diagonalnych macierzy rozmiaru $2^n \times 2^n$, niech $\mathcal{U}_n$ jest zbiorem wszystkich macierzy unitarnych $U$ rozmiaru $2^n \times 2^n$, które zachowują algebrę $D_n$. Niech dalej $U\left(\frac{1}{2^n}\right)$ jest elementem grupy $\mathcal{U}_n$ zdefiniowanym następująco:

$$U\left(\frac{1}{2^n}\right)^* (d_{11}, d_{22}, ...)\, U\left(\frac{1}{2^n}\right) = (d_{2^n 2^n}, d_{11}, d_{22}...)$$

gdzie macierz diagonalna została zapisana w postaci macierzy wierszowej i zostały wypisane jedynie jej elementy diagonalne. Ponieważ mamy naturalne włożenie homomorficzne grup $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1}$ możemy rozważyć zbiór $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{U}_n$, który jest grupą abelową izomorficzną z grupą liczb diadycznych $\mathcal{D}$ odcinka $[0, 1]$ z dodawaniem modulo 1:

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{k}{2^n} : \quad k = 0, 1, 2, ...2^n - 1 \quad \text{oraz} \quad n = 1, 2, ... \right\}$$

Izomorfizm ten zadany jest formułą: liczbie diadycznej $d = \frac{k}{2^n}$ przypisujemy operator unitarny $U(d) = U\left(\frac{1}{2^n}\right)^k$. Możemy teraz podać reprezentację grupy liczb diadycznych $\mathcal{D}$ w postaci podgrupy grupy $*$-automorfizmów wewnętrznych algebry $\mathfrak{M}$:

$$d \in \mathcal{D} \longrightarrow \alpha(d) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$$

gdzie $\alpha(x) \equiv U(d)^* x U(d)$ dla każdego $x \in \mathfrak{M}$. W pracy zostało udowodnione następujące twierdzenie: Istnieje $\sigma$-słabo ciągły homomorfizm grup $\alpha : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ taki, że $\alpha(m) = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}}$ dla każdej liczby całkowitej $m \in \mathbb{Z}$ oraz dla liczb diadycznych $d \in \mathcal{D}$ zachodzi: $\alpha(d) = U(d)^* \,\cdot\, U(d)$. Ponadto,

każdy $*$-automorfizm $\alpha(t)$ jest przestrzenny, tzn.: $\alpha(t) = U(t)^* \cdot U(t)$ dla pewnej silnie ciągłej grupy $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ operatorów unitarnych w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{\omega_0}$ reprezentacji $\pi_{\omega_0}$. W szczególności dostajemy wyrażenie na generator $\delta$ grupy $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ w postaci $\delta(\cdot) = \mathbf{i}[H, \cdot]$, gdzie $H$ jest samosprzężonym operatorem w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{\omega_0}$ generującym grupę $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.
**2.** Niech $\mathfrak{D} \subset \mathcal{A}$ jest algebrą Banacha generowaną przez macierze nieskończone postaci $\sigma_k^3 = \mathbf{1} \otimes ... \otimes \mathbf{1} \otimes \sigma_3 \otimes \mathbf{1} \otimes ...$, gdzie $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oraz macierz Pauliego $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ stojąca jedynie na k-tej pozycji iloczynu tensorowego.
Algebra $\mathfrak{D}$ jest maksymalną abelową algebrą samosprzężoną, która jest $*$-izomorficzna z algebrą $C(\mathcal{C})$ wszystkich funkcji zespolonych ciągłych na zbiorze Cantora $\mathcal{C}$. Rozważany jest układ złożony z cząstki swobodnej pełniącej rolę środowiska. Przestrzeń stanów cząstki jest zadana przez przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_E = L^2(\mathbb{R}, dm)$ ($dm$ jest miarą Lebesgue'a na prostej rzeczywistej) oraz kinematyka opisana jest algebrą wszystkich operatorów ograniczonych działających w $\mathcal{H}_E$: $\mathfrak{M}_E = \mathcal{B}(\mathcal{H}_E)$. Algebra całego układu jest algebrą von Neumanna $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}_E$ operatorów działających w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{\omega_0} \otimes \mathcal{H}_E$. Hamiltonian oddziaływania jest postaci:

$$H_{int} = \pi_{\omega_0}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\sigma_k^3\right) \otimes \hat{p}$$

gdzie $\hat{p}$ jest operatorem pędu cząstki w $\mathcal{H}_E$. Dynamika zredukowana jest zadana formułą

$$T_t^0(x) = \Pi^{\omega_E}\left(e^{\mathbf{i}tH_{int}} x \otimes \mathbf{1}_E e^{-\mathbf{i}tH_{int}}\right)$$

gdzie $\Pi^{\omega_E} : \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}_E \longrightarrow \mathfrak{M}$ jest warunkową wartością oczekiwaną względem stanu odniesienia $\omega_E = |\psi\rangle\langle\psi|$, gdzie wektor $|\psi\rangle$ jest zadany

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\mathbf{i}px}dp}{\sqrt{\pi(1+p)}} dm(p) \tag{2}$$

oraz $\Pi^{\omega_E}(x \otimes A) = \omega_E(A)x \otimes \mathbf{1}_E \equiv \omega_E(A)x$.
Zostało udowodnione następujące twierdzenie: $\{T_t^0\}_{t\geq 0}$ jest kwantową półgrupą dynamiczną na $\mathfrak{M}$, która jest również zwężająca w normie śladowej. Generator półgrupy $\{T_t^0\}_{t\geq 0}$ oznaczymy przez $L_0$. Dowodzi się, że zaburzenie $\delta + L_0$ jest generatorem półgrupy kwantowej. Odpowiadającą temu generatorowi półgrupę oznaczymy przez $\{T_t\}_{t\geq 0}$.
Podalgebra von Neumana $\mathfrak{M}_1$ opisana teoretycznie powyżej w rozważanym modelu jest $*$-izomorficzna z algebrą $\pi_{\omega_0}(\mathfrak{D}) = L^\infty(\mathcal{C}, d\mu)$.

Opisana powyżej dynamika efektywna jest zadana przez grupę $*$-automorfizmów $\{T_{1|t}\}_{t\geq 0}$, która to grupa jest izomorficzna z grupą $*$-automorfizmów algebry $L^\infty(S^1, dm)$ generowanej przez potok $\Phi_t : S^1 \longrightarrow S^1$, $t \in \mathbb{R}$ zadający jednostajny ruch po okręgu $S^1$: dla $x \in L^\infty(S^1, dm)$ mamy $x \longrightarrow x_t$, gdzie $x_t(\alpha) = x(\alpha \hat{+} 2\pi t)$, dla $\alpha \in [0, 1)$, gdzie $\hat{+}$ jest dodawaniem modulo $2\pi$.

Model cząstki oddziałującej z układem spinów był rozważany przez Bella w kontekście dyskusji redukcji pakietu falowego ale nie rozważał on dynamiki powstałej przez uśrednienie względem stopni swobody środowiska.

Zaproponowany w przedstawionej rozprawie model jest pierwszym ścisłym modelem matematycznym realizującym w ujęciu algebraicznym scenariusz, w którym w wyniku procesu ewolucji układu kwantowego pojawiają się efektywne, tzn. jedyne dostępne w obserwacji, stopnie swobody, którym można przypisać statut klasycznych zmiennych dynamicznych podlegających klasycznemu prawu ewolucji, tzn. zadanemu przez potok na przestrzeni stopni swobody układu klasycznego opisanej rozmaitością różniczkową.

W przypadku algebr nieskończonego typu można również uzyskać modele podobnego typu. Niech $G = D \times D \times D$ jest produktem prostym grupy liczb diadycznych na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Niech $\mathcal{H} = \bigoplus_G L^2(\mathbb{R}^3, dm)$, gdzie $dm$ jest miarą Lebesgue'a w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta odpowiadającą układowi, którego dynamikę zbudujemy poniżej. Grupa $G$ działa na algebrze $L^\infty \equiv L^\infty(\mathbb{R}^3, dm)$ w następujący sposób: $\alpha_g(f)(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + g)$ dla każdego $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. Działanie to jest wolne i ergodyczne. Kinematyczne stopnie swobody układu opisuje algebra von Neumanna będąca iloczynem krzyżowym: $\mathfrak{M} = L^\infty \otimes_\alpha G$. Tak otrzymana algebra jest faktorem typu $II_\infty$, gdzie $\tau : \mathfrak{M}_+ \longrightarrow [0, +\infty]$ zdefiniowane wzorem $\tau(x) = \int x(0,0)dm$ jest półskończoną wagą śladową (śladem), która jest normalna i wierna. Niech $\pi_\alpha$ jest kanonicznym normalnym $*$-izomorfizmem algebry $L^\infty$ w $\mathfrak{M}$. $\pi_\alpha(L^\infty)$ jest przemienną podalgebrą von Neumanna algebry $\mathfrak{M}$. Środowisko opiszemy przestrzenią Hilberta $\mathcal{H}_E = L^2(\mathbb{R}^3, dm)$ i algebrą $\mathcal{B}(\mathcal{H}_E)$ wszystkich operatorów ograniczonych w $\mathcal{H}_E$. Algebra całego układu to algebra von Neumanna $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}_E$ operatorów działających w $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E$
Pełny hamiltonian układu jest zadany istotnie samosprzężonym operatorem

$$H_{SE} = -\mathbf{v} \cdot \hat{P} \otimes \mathbf{1}_E + \frac{1}{2}\mathbf{1} \otimes \hat{p} \cdot \hat{p} + \sum_{k=1}^{3} c_k \pi_\alpha(\hat{x}_k) \otimes \hat{p}_k$$

gdzie $c_k > 0$ dla $k = 1, 2, 3$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ jest operatorem położenia oraz $\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ jest operatorem pędu w $L^2(\mathbb{R}^3, dm)$.

Ponadto $\hat{P} = (\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$, $\hat{P}_k = \oplus_G \hat{p}_k$ oraz $\pi_\alpha(\hat{x}_k) = \int \lambda \pi_\alpha(dE_k(\lambda))$, gdzie $dE_k$ jest miarą spektralną operatora $\hat{x}_k$. Dziedzina jest zadana przez zbiór

$$D(H) = \left\{ \tilde{\xi} \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_E : \quad \tilde{\xi}(g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3), \quad \tilde{\xi}(g) = 0 \ \text{ p.w. } \ g \in G \right\}$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest przestrzenią funkcji Schwartza zanikających do zera w nieskończoności wraz ze wszystkimi pochodnymi szybciej niż odwrotność dowolnego wielomianu, a symbol p.w. oznacza: „dla prawie wszystkich”. Wybieramy stan środowiska $\omega_E = |\psi\rangle\langle\psi|$, gdzie stan $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3, dm)$ jest zdefiniowany $\psi(\mathbf{r}) = \prod_k \psi_0(r_k)$ i gdzie $\psi_0$ jest zadany przez transformatę Fouriera jak we wzorze (2). Półgrupa została wprowadzona formułą

$$T_t(x) = \Pi^{\omega_E} \left( e^{\mathbf{i}H_{SE}} x \otimes \mathbf{1} e^{-\mathbf{i}H_{SE}} \right)$$

dla każdego $x \in \mathfrak{M}$.
$\{T_t\}_{t \geq 0}$ jest kwantową półgrupą dynamiczną na $\mathfrak{M}$. Rozkład algebry obserwabli ma postać $\mathfrak{M}_1 = \pi_\alpha(L^\infty)$ oraz dla wszystkich $\eta \in \mathfrak{M}_*$ oraz $x \in \mathfrak{M}_2$ $\eta(T_t x) \longrightarrow 0$ dla $t \to +\infty$. W konsekwencji uzyskano, że efektywnemu układowi dynamicznemu odpowiada jednostajny ruch prostoliniowy w przestrzeni euklidesowej, dokładniej: $\left(\mathfrak{M}_1, T_{1|t}\right) \simeq (L^\infty, \Phi_t)$, gdzie $\Phi$ jest potokiem zadanym na $\mathbb{R}^3$ w następujący sposób: $\Phi_t(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + t\mathbf{v}$ dla $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ oraz $t \in \mathbb{R}$.

Zastosowanie iloczynu krzyżowego w kontekście fizyki pojawiło się w pracach Landsmanna. Użył on iloczynu krzyżowego przemiennej algebry z odpowiednią grupą automorfizmów do procedury kwantowania odpowiedniego układu klasycznego. Opisany wyżej model matematyczny może być, w tym kontekście, zakwalifikowany jako próba realizacji procesu odwrotnego do procesu kwantyzacji: wyprowadzenia układu klasycznego z kwantowego - „dekwantyzacji”.

Opisany matematyczny schemat może być zastosowany nie tylko do wyobrażenia sobie w jaki sposób mogą być opisane aspekty klasyczne w tym mechanizm pojawiania się dynamiki klasycznej w sposób spójny w ramach jednego modelu o charakterze opartym wyłącznie na regułach świata kwantowego. Może on posłużyć za punkt wyjścia do modelowania innych efektywnych zachowań układów kwantowych. W szczególności takie efektywne zachowanie może mieć czysto kwantowy charakter. Pytanie to było motywacją do budowy modeli następującego typu niżej opisanego. Rozważony został układ spinowy taki sam jak w pierwszym przykładzie powyżej i został sprzęgnięty z układem nieoddziałujących fononów w dodatniej temperaturze $T$ ($\beta = \frac{1}{kT}$, $k$ stała Bolzmanna), który odpowiada jednowymiarowemu kryształowi harmonicznemu. Przestrzeń Hilberta stowarzyszona z bezspinowym fononem to

$\mathcal{H}_{\mathrm{f}} = L^2(\mathbb{R}, dm)$. Przestrzeń Hilberta stowarzyszona z całym kryształem jest zadana przez $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ jest bozonową przestrzenią Focka nad przestrzenią $\mathcal{H}_{\mathrm{f}}$. Fononowe pole $\phi$ jest zadane formułą $\phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f) + a^*(f))$, gdzie $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{f}}$ a wyrażenia $a(f)$, $a^*(f)$ są operatorami, odpowiednio, anihilacji i kreacji zadanymi w reprezentacji Araki-Woodsa

$$a(f) = a_F\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}} f\right) \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes a_F^*\left(\rho^{\frac{1}{2}} \overline{f}\right)$$

$$a^*(f) = a_F^*\left((1+\rho)^{\frac{1}{2}} f\right) \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes a_F\left(\rho^{\frac{1}{2}} \overline{f}\right)$$

i gdzie z kolei $a_F$, $a_F^*$ są operatorami kreacji i anihilacji w przestrzeni Focka. $\rho$ jest rozkładem Plancka

$$\rho(k) = \frac{1}{e^{\beta\omega(k)} - 1}$$

z relacją dyspersji $\omega(k) = |k|$. Hamiltonian opisujący nieoddziałujące fonony $H_E = H_0 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes H_0$, gdzie $H_0 = \int \omega(k) a_F^*(k) a_F(k) dk$. Zbudowana reprezentacja odpowiada stanowi $\omega_E$ na algebrze CCR określonemu przez równanie

$$\omega_E(a^*(f)a(g)) = \int \rho(k)\overline{g(k)} f(k) dk$$

Stan $\omega_E$ zostanie użyty jako stan odniesienia przy wyznaczaniu dynamiki samego układu spinowego. Dynamika całego układu jest opisana hamiltonianem:

$$H = \pi(H_S^0) \otimes \mathbf{1}_E + \mathbf{1}_S \otimes H_E + \lambda \sum_{l=1}^{\infty} \pi(\sigma_l^1) \otimes \phi(f_l)$$

gdzie $H_S^0 = \sum_{k=1}^{\infty} h_l \sigma_l^3$. Macierz $\sigma_l^1$ jest macierzą Pauliego $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ w $l$-tym węźle. Dla prostoty rozważymy jedynie sprzężenie układu spinowego z jedną modą pola fononowego, tzn. $f_n = a_n g$, gdzie $a_n$ jest ciągiem takim, że $a_n \geq \sum_{l=n+1}^{\infty} a_l$ dla n=1,2,.... Przykładowo $a_n \sim \frac{1}{2^n}$. Przy technicznych założeniach dotyczących mody $g$ pola (opisanych szczegółowo w publikacjach) można wyprowadzić przy użyciu metody zwanej *singular coupling limit* dynamikę układu spinów, która jest markowska i postać jej generatora jest następująca

$$L(\cdot) = \mathbf{i}\left[\pi_\omega(H_s^0) + b\pi_\omega(A)^2, \ \cdot\ \right] + \lambda a \pi_\omega(A) \quad \cdot \quad \pi_\omega(A) - \frac{1}{2}\left\{\pi_\omega(A)^2, \ \cdot\ \right\}$$

gdzie $A = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \sigma_l^1$, stałe $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$ są wyznaczone przez środowisko. Nawias $\{\ \cdot\ ,\ \cdot\ \}$ oznacza antykomutator. Przyjmując, że $h_n \geq \sum_{l=n+1}^{\infty} h_l$

udowodniono następujące twierdzenia: dla półgrupy $T_t = e^{tL}$ ma miejsce rozkład algebry obserwabli, przy czym algebra efektywna $\mathfrak{M}_1 = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$
Jeśli $a_1 = 0$, to wówczas zachodzi $\mathfrak{M}_1 = M_{2\times 2}$, gdzie $M_{2\times 2}$ jest algebrą wszystkich macierzy zespolonych rozmiaru $2 \times 2$. Ponadto dynamika efektywna na $\mathfrak{M}_1$ ma charakter czysto schrödingerowski, tzn. zachodzi:

$$T_{1|t}(x) = e^{\mathbf{i}t\sigma_3} x e^{-\mathbf{i}t\sigma_3} \quad \text{dla każdego } x \in \mathfrak{M}_1 \text{ oraz } t \in \mathbb{R}$$

Rozważono szereg konstrukcji półgrup na algebrach CCR [3]. Konstrukcje zostały oparte na połączeniu ze sobą ewolucji o charakterze deterministycznym i ewolucji losowej odbywających się w pewnych przestrzeniach fazowych. Przedstawiana metoda konstruowania półgrup jest w dużym stopniu podobna do procedury zwanej drugą kwantyzacją wprowadzoną do konstruowania dynamik unitarnych układu wielu cząstek. W istocie może być interpretowana jako jej zaburzenie dynamiką o charakterze losowym.
Niech $(\mathsf{S}, +)$ jest dowolną abelową grupą, którą zaopatrujemy w topologię dyskretną. Wówczas $\hat{\mathsf{S}}$ jest jej grupą dualną zaopatrzoną w topologię Gelfanda. Niech $S : \mathsf{S} \longrightarrow \mathsf{S}$ jest homomorfizmem. Rozważmy odwzorowanie dualne $\hat{S} : \hat{\mathsf{S}} \longrightarrow \hat{\mathsf{S}}$ zdefiniowane warunkiem: $(\hat{S}\chi)(f) = \chi(Sf)$ dla każdego $\chi \in \hat{\mathsf{S}}$ oraz $f \in \mathsf{S}$. Odwzorowanie $\hat{S}$ jest ciągłym homomorfizmem grupy $\hat{\mathsf{S}}$. Niech dalej $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ jest jednoparametrową grupą izomorfizmów $S_t : \mathsf{S} \longrightarrow \mathsf{S}$. Wówczas odpowiadająca rodzina $\hat{S}_t$, $t \in \mathbb{R}$ jest również jednoparametrową grupą działającą w $\hat{\mathsf{S}}$. Wprowadźmy oznaczenie: $M_1^+(\hat{\mathsf{S}})$ oznacza zbiór borelowskich miar probabilistycznych na $\hat{\mathsf{S}}$. Miarą szczególnego typu jest miara Diraca skoncentrowana w elemencie neutralnym grupy $\hat{\mathsf{S}}$. Oznaczmy ją przez $\delta_{\hat{e}}$, gdzie $\hat{e}$ jest elementem neutralnym grupy $\hat{\mathsf{S}}$. Podobnie $\delta_\xi$ jest miarą probabilistyczną skoncentrowaną w punkcie $\xi$. Wprowadzone zostało następujące pojęcie:
rodzinę miar $\{\mu_t\}_{t\geq 0} \subset M_1^+(\hat{\mathsf{S}})$ nazywamy *$S_t$-zaburzoną półgrupą splotową miar* (lub krótko *$S_t$-półgrupą*) jeśli $\mu_0 = \delta_{\hat{e}}$ oraz jest spełniony poniższy warunek

$$\mu_t * \hat{S}_{t*}\mu_s = \mu_{s+t} \qquad \text{dla każdego } t, s \geq 0$$

gdzie $*$ oznacza splot miar a $\hat{S}_{t*} : M_1^+(\hat{\mathsf{S}}) \longrightarrow M_1^+(\hat{\mathsf{S}})$ jest transportem miary zdefiniowanym przez $\left[\hat{S}_{t*}(\mu)\right](E) = \mu\left(\hat{S}_t^{-1}E\right)$ dla każdego zbioru mierzalnego $E$. $\hat{S}_t^{-1}E$ jest przeciwobrazem zbioru $E$. Pokazano, że: każdej $S_t$-półgrupie odpowiada markowski proces stochastyczny o wartościach w przestrzeni $\hat{\mathsf{S}}$. W pełnej analogii do charakteryzacji Lévy-Khintchina dla półgrup splotowych miar można wprowadzić następujące klasy $S_t$-półgrup:

[3]algebra kanonicznych reguł komutacji (**C**anonical **C**ommutation **R**elations) albo też algebra Weyla

*diracowska, gaussowaska i poissonowska.* Wówczas: ogólniejsze $S_t$-półgrupy można uzyskać przez sploty wyżej wymienionych typów $S_t$-półgrup oraz odpowiednie granice $S_t$-półgrup typu poissonowskiego.

Niech dalej $\mathsf{S}$ jest przestrzenią wektorową zaopatrzoną w formę symplektyczną $\sigma$. Niech $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ jest grupą symplektycznych automorfizmów $\mathsf{S}$, tzn. spełnia warunek: $\sigma(S_t f, S_t g) = \sigma(f, g)$ dla wszystkich $f, g \in \mathsf{S}$ dla $t \in \mathbb{R}$ oraz $\mathcal{F}(\mu)$ transformatą Fouriera miary $\mu$. Wówczas: dla $S_t$-półgrupy $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ miar na $\hat{\mathsf{S}}$ istnieje jednoznacznie wyznaczona półgrupa operatorów markowskich $\{T_t\}_{t\geq 0}$ na algebrze Weyla $T_t : \mathfrak{W}(\mathsf{S}) \longrightarrow \mathfrak{W}(\mathsf{S})$ taka, że

$$T_t W(f) = \mathcal{F}(\mu_t)(f) W(S_t f) \qquad \text{dla każdego} \quad f \in \mathsf{S}$$

Ponadto rozważono szereg modeli prowadzących do redukcji algebry wyjściowej, w tym można zawrzeć modele prowadzące do dynamik newtonowskich. Jako pewien przykład rozważmy następujący model. Weźmy ośrodkową zespoloną przestrzeń Hilberta z bazą ortonormalną $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Niech będzie zadana dynamika poprzez samosprzężony operator $H$, $S_t = e^{\mathbf{i}tH}$. Przyjmuje się, że $H$ posiada przynajmniej jedną niezdegenerowaną wartość własną $\omega \neq 0$. Niech $e_1$ jest taki, że $He_1 = \omega e_1$. Niech rzeczywista przestrzeń $\mathsf{S}$ jest rozpięta przez wektory $e_1, Je_1, e_2, Je_2, ...$, gdzie operator $J$ jest operatorem mnożenia przez jednostkę urojoną. Symplektyczna forma jest zadana poprzez iloczyn skalarny $\sigma(f, g) = \mathrm{Im}\langle f, g\rangle$. Niech $Q : \mathsf{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest dodatnią formą kwadratową: $Q(f) = \langle f, P^{\perp} f\rangle$, gdzie $P^{\perp} = \mathbf{1} - P$ i $P = |e_1\rangle\langle e_1|$ rzutuje na podprzestrzeń rozpiętą przez $e_1$. Rozważmy półgrupę operatorów markowskich $T_t$ zdefiniowaną warunkiem:

$$T_t(W(f)) = \exp\{-t\|P^{\perp} f\|^2\} W(e^{\mathbf{i}tH} f) \qquad \text{dla} \quad f \in \mathsf{S}$$

Poniższe stwierdzenie jest również prawdziwe przy wyborze ogólniejszej postaci formy kwadratowej, np. $Q(f) = \langle f, Af\rangle$, gdzie $\mathrm{supp}A = P^{\perp}$.

Powyższa dynamika wyznacza rozkład $\mathfrak{W}(\mathsf{S}) = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$, gdzie $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{W}(\mathbb{R}^2)$. Zachodzi:

$$T_{1|t} W(x, y) = W(x \cos\omega t - y \sin\omega, x \sin\omega t + y \cos\omega t)$$

dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ponadto dla każdego stanu $\omega$ na algebrze Weyla $\mathfrak{W}(\mathsf{S})$ i każdego elementu $A \in \mathfrak{M}_2$ zachodzi $\omega(T_t A) \longrightarrow 0$ dla $t \to \infty$

Otrzymany układ dynamiczny $(T_{1|t}, \mathfrak{M}_1)$ w reprezentacji Schrödingera odpowiada dynamice kwantowego oscylatora harmonicznego. Rezultat można uogólnić np. na dowolną skończoną liczbę kwantowych oscylatorów harmonicznych.

Warto zwrócić uwagę, że konstrukcja prezentowanej klasy półgrup pozwala

na obejście delikatnych kwestii dotyczących konstrukcji jej generatorów. Dotyczy to zwłaszcza budowania dynamik półgrupowych w regularnych reprezentacjach $\pi$ algebry CCR w przestrzeniach Hilberta. Wówczas w sposób naturalny pojawiają się operatory pola, będące nieograniczonymi operatorami. Oddziaływanie angażujące nieskończoną ilość mód pola stwarza dodatkowe utrudnienia, gdyż matematycznie odpowiada to analizie nieskończonych sum nieograniczonych operatorów. Powyżej przytoczona obserwacja dotycząca łatwości konstrukcji generatorów zbudowanych z szeregów operatorowych w istocie była jednym z punktów wyjścia do analizy rozszerzeń wyżej wprowadzonych półgrup w reprezentacjach CCR.
Zagadnienie rozszerzenia półgrupy $\{T_t\}_{t\geq 0}$ określonej na algebrze CCR w reprezentacjach tej algebry można przedstawić abstrakcyjnie w następujący sposób. Niech $\pi_\omega$ jest reprezentacją GNS związaną ze stanem $\omega$ na algebrze $\mathfrak{W}(\mathsf{S})$. $\mathcal{H}_\omega$ jest przestrzenią Hilberta reprezentacji. Będziemy rozważać sytuację, kiedy jest ona ośrodkowa. Kolejnym założeniem odnoszącym się do stanu $\omega$ jest wymóg aby odwzorowanie $f \in \mathsf{S} \longrightarrow \pi_\omega(W(f))$ było ciągłe w topologii normowej $\mathsf{S}$ i silnej topologi operatorowej rozważanej w przestrzeni operatorów działających w $\mathcal{H}_\omega$. Warunek ten można osłabić do wymogu mierzalności ale przy nałożeniu warunku następującego typu [4]:

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathsf{S}} c_\omega(g+g')d\nu_t(g) = c_\omega(g') \qquad \text{dla każdego } \ g' \in \mathsf{S}$$

gdzie $c_\omega$ to funkcjonał charakterystyczny.
Dla półgrupy $T_t : \mathfrak{W}(\mathsf{S}) \longrightarrow \mathfrak{W}(\mathsf{S})$ można postawić następujące pytanie o jej rozszerzenie: czy i kiedy istnieje $\sigma$-słabo ciągła półgrupa operatorów normalnych taka, że:

$$\begin{array}{l} T_t^\omega : \pi_\omega\left(\mathfrak{W}(\mathsf{S})\right)'' \longrightarrow \pi_\omega\left(\mathfrak{W}(\mathsf{S})\right)'' \\ T_t^\omega \pi_\omega(x) = \pi_\omega(T_t x) \qquad \text{dla każdego } \ x \in \mathfrak{W}(\mathsf{S}) \end{array}$$

Zagadnienie to łączy się z dwoma kwestiami. Pierwsza z nich dotyczy rozszerzalności w reprezentacji każdego z operatorów $T_t$ do $T_t^\omega$. Druga dotyczy $\sigma$-słabej ciągłości tak rozszerzonej rodziny operatorów względem parametru $t$. Tego typu zagadnienia były dyskutowane w literaturze dla $*$-automorfizmów. Dla części automorficznej półgrupy $\{T_t\}_{t\geq 0}$ przyjęto więc następujące założenia: istnieje grupa $*$-automorfizmów $\{\alpha_t^\omega\}_{t\in\mathbb{R}}$ taka, że

$$\alpha_t^\omega\left(\pi_\omega(W(f))\right) = \pi_\omega(\alpha_t(W(f)))$$

dla każdego $f \in \mathsf{S}$ i $t \in \mathbb{R}$. Ponadto przyjęto założenie, że odwzorowanie $t \longrightarrow \pi_\omega(W(S_t f))$ jest ciągłe w słabej operatorowej topologii. Tym samym po-

[4]dokłade sformułowania znajdują się w publikacjach

wyższe pytania dotyczące rozszerzalności operatorów półgrupy $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sprowadza się głównie do analizowania rozszerzalności jej części dyssypatywnej. Przyjęte założenia umożliwiające osiągnięcie tego celu mają charakter techniczny i łączą się zasadniczo z własnościami $S_t$-półgrupy miar $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ (różne warianty zostały rozważone). Jeśli każdy z operatorów $T_t$ ma rozszerzenie do normalnego operatora $T_t^\omega$ oraz dla każdego wyboru $x \in \mathfrak{W}(\mathsf{S})$ funkcja $t \longrightarrow T_t(x)$ jest $\sigma$-słabo mierzalna, to $\{T_t^\omega\}_{t\geq 0}$ jest $\sigma$-słabą półgrupą, wtedy i tylko wtedy gdy

$$\bigcap_{t>0} \ker T_t^\omega = \{0\}$$

Dla $S_t$-półgrupy miar $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ i dynamiki $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ istnieje kwantowa półgrupa $\{T_t^\omega\}_{t\geq 0}$ na algebrze von Neumanna $\pi_\omega(\mathfrak{W})''$ jednoznacznie wyznaczona warunkiem

$$T_t^\omega \pi_\omega(W(f)) = \mathcal{F}(\mu_t)(f)\pi_\omega(W(S_t))$$

Podobnie jak w przypadku półgrup konstruowanych na algebrach Weyla tak i teraz można wyróżnić trzy typy półgrup $\{T_t\}_{t\geq 0}$: diracowska, gaussowska i poissonowska. Rozważając stany regularne $\omega$ w pracy przedstawiono postać generatorów tych półgrup. Przytoczę jedynie przypadek gaussowski, który był inspiracją do tych badań i jednocześnie zawiera wspomniany wyżej ciekawy aspekt sumowania szeregów, którego wyrazami są operatory nieograniczone. Niech $\omega$ jest stanem regularnym na algebrze Weyla $\mathfrak{W}(\mathsf{S})$, gdzie $\mathsf{S}$ jest przestrzenią symplektyczną niesioną przez zespoloną przestrzeń Hilberta $\mathsf{H}$. Niech $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ jest $S_t$-półgrupą miar gaussowskich na przestrzeni $\mathsf{S}$, wyznaczoną przez formę kwadratową, która jest ciągła w topologii Sazonova przestrzeni $\mathsf{H}$. Wówczas generator półgrupy $\{T_t\}_{t\geq 0}$ ma postać

$$L(x) = \delta(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \left[\Phi_\omega(f_k), [\Phi_\omega(f_k), x]\right] \qquad \text{dla każdego } \; x \in D$$

gdzie $\delta$ jest derywacją odpowiadającą dynamice automorficznej a część dyssypatywna opisana jest przez ciąg $\lambda_i \geq 0$ taki, że $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < +\infty$ oraz mody pola $\Phi_\omega(f_i)$, gdzie $\{f_i\} \subset \mathsf{S}$ jest ciągiem ograniczonym w normie $\mathsf{H}$. W końcu $D$ jest rdzeniem generatora zadanym przez kombinacje liniowe elementów postaci $\int_0^\infty \varphi(t)\pi_\omega(T_t W(f))dt$, gdzie $f \in \mathsf{S}$ i $\varphi$ jest dowolną funkcją gładką o nośniku zwartym na półprostej $(0, +\infty)$.
Cała konstrukcja jest uwarunkowana dopasowaniem własności stanu $\omega$ na algebrze Weyla, własności miar $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ w tym szczególnie lokalizacji ich nośnika i regularności samych używanych operatorów na algebrze Weyla. Z jednej strony własności stanu mogą pozwolić na rozszerzenie algebry Weyla

w reprezentacji (rozszerzenie przestrzeni $\mathsf{S}$), co z kolei jest korzystne, bo dopuszcza większą swobodę w lokalizacji nośnika miar $S_t$-półgrupy. Z drugiej strony stany niedopuszczające takich rozszerzeń układu Weyla (układ fizyczny, który jest opisywanym bardziej osobliwymi obiektami matematycznymi) narzucają silniejsze warunki na lokalizację miar $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$.
Szczególna sytuacja, w której można zastosować twierdzenia tej pracy, występuje w przypadku temperaturowych reprezentacji opisanych przez Araki-Woodsa, czy też próżniowych reprezentacji teorii pola.

Niech $X_0$, $X_1$,...,$X_r$ są gładkimi polami wektorowymi na pewnej różniczkowej rozmaitości $M$. Powiemy, że pola te tworzą *układ pól Hörmandera* jeśli w każdym punkcie $p \in M$ pola te wraz z ich wszystkimi możliwymi nawiasami Liego do pewnego rzędu $S(p)$ rozpinają przestrzeń styczną $T_pM$. Jednym z podstawowych przykładów zastosowania w fizyce pól Hörmandera są próby wyprowadzenia prawa Fouriera opisującego stacjonarny rozkład temperatury w podłużnym ciele, którego dwa końce są utrzymywane w różnych temperaturach. Wychodząc od dynamiki mikrocząstek (skończona liczba cząstek) postuluje się generator odpowiadający procesowi Markowa w postaci operatora następującego typu:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{r} X_k^2 + X_0 \tag{3}$$

gdzie pola $X_0$, $X_1$,...,$X_r$ tworzą układ pól Hörmandera. Niech $\mathcal{D}(M)$ jest klasą gładkich funkcji o zwartych nośnikach oraz $\mathcal{D}'(M)$ odpowiadającą klasą dystrybucji Schwarza na rozmaitości $M$. Słynne twierdzenie Hörmandera orzeka, że operator $\mathcal{L}$ jest *hypoelliptyczny*, tzn.:

$$\text{sing-supp}\,(T) = \text{sing-supp}\,(\mathcal{L}T) \qquad \text{dla każdego} \ \ T \in \mathcal{D}'(M)$$

Jeśli wymiar rozmaitości $M$ jest większy od $r$ stojącego w równaniu (3), to takie operatory nazywamy *zdegenerowanymi* lub też używamy nazwy *operatory Hörmandera*. W literaturze badano długoczasowe zachowanie półgrup Markowa generowanych przez operatory Hörmandera na grupach Liego, gdzie rozważano lewo niezmiennicze pola $X_k$ na grupie. Taka analiza dla grup niezwartych, znacznie trudniejsza niż dla grup zwartych, jest opisana w literaturze matematycznej i dotyczy jedynie tzw. symetrycznych przypadków, tzn. takich dla których człon $X_0 = 0$. W kontekście nie tylko związanym z grupami przypadki niesymetryczne z $X_0 \neq 0$ są znacznie trudniejsze do analizy od symetrycznego przypadku. Również, gdy grupa Liego $G$ jest grupą zwartą, przypadek symetryczny z $X_0 = 0$ jest łatwiejszy.

Losowy proces Markowa na grupie Liego, któremu odpowiada półgrupa markowska generowana przez operator Hörmandera zbudowany wyłącznie z lewo niezmienniczych pól na grupie będziemy nazywali *zdegenerowanymi dyfuzjami* lub też *dyfuzjami Hörmandera.*
Przedmiotem badań tej części rozprawy jest analiza długoczasowego zachowania pewnej klasy kwantowych półgrup markowskich w oparciu o własności długoczasowych zachowań zdegenerowanych dyfuzji na grupach Liego. Niech $D \subset \mathcal{A}$ jest gęstą $*$-podalgebrą pewnej $C^*$-algebry. Niech Der$(D)$ jest zbiorem $*$-derywacji, które zachowują zbiór $D$. Główna myśl zawarta w tej części rozprawy polega na wyjściu od pewnego skończonego zbioru derywacji $\{\delta_0, \delta_1, ...\delta_m\} \subset$Der$(D)$. Rozważa się operator $L = \sum_{i=1}^m a_{ij}\delta_i \circ \delta_j + \delta_0$. $(a_{ij})$ tworzy pewną symetryczną macierz dodatnio określoną o współczynnikach rzeczywistych. Przy pewnych założeniach operator ten z dziedziną $D$ jest pregeneratorem, tzn. jego domknięcie generuje silnie ciągłą półgrupę operatorów markowskich $T_t = e^{tL}$. Następnie, rozważa się komutatory tych derywacji: $[\delta_i, \delta_j] = \delta_i \circ \delta_j - \delta_j \circ \delta_i$ oraz komutatory wyższych rzędów. Przy pewnych okolicznościach może się zdarzyć, że rzeczywiste kombinacje liniowe tych derywacji wraz z ich komutatorami do pewnego skończonego rzędu utworzą algebrę Liego $\mathfrak{g}$. Niech $G$ jest jednospójną grupą Liego, której algebra Lie pokrywa się z $\mathfrak{g}$. Z jednej strony algebra derywacji może posłużyć do zbudowania ciągłego działania grupy $G$ na algebrze $\mathcal{A}$: $g \in G \longrightarrow \alpha_g \in Aut(\mathcal{A})$, gdzie symbol $Aut(\mathcal{A})$ oznacza grupę $*$-automorfizmów algebry $\mathcal{A}$ zaopatrzoną w silną topologię. Z drugiej strony można stowarzyszyć z generatorem $L$ dyfuzję na grupie Liego $G$ w taki sposób, że derywacji $\delta_i$ występującej w generatorze $L$ przypisujemy odpowiednie pole lewo niezmiennicze $X_i$ na grupie $G$. Niech $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^m a_{ij}X_iX_j + X_0$ będzie generatorem dyfuzji na grupie Liego $G$ a $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ splotową półgrupą miar odpowiadającą półgrupie generowanej przez $\mathcal{L}$, która działa na algebrze funkcji ciągłych $C_0(G)$ znikających w nieskończoności. Wówczas okazuje się, że

$$T_t(x) = \int_G \alpha_g(x)\mu_t(dg) \qquad \text{dla każdego } \ x \in \mathcal{A}$$

Powyższy program można zrealizować dla grup zwartych, dokładniej przy liście następujących założeń:

**(Z)** każda z derywacji $\delta_0$, $\delta_1$,...,$\delta_m$ jest zachowawcza; istnieje gęsty zbiór $D_0 \subset D$ elementów geometrycznych dla $\delta_0$, $\delta_1$,...,$\delta_m$; forma Killinga algebry $\mathfrak{g}$ jest ujemnie określona

Niech $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ jest zdefiniowany poprzez: $Px = \int_G \alpha_g(x)dg$, dla $x \in \mathcal{A}$, gdzie całkuje się względem unormowanej miary Haara na grupie $G$. $P$ jest warunkową wartością oczekiwaną na $C^*$-podalgebrę $\mathcal{F}_\alpha$: $x \in \mathcal{F}_\alpha$ jeśli $\alpha_g(x) = x$ dla każdego $g \in G$. Wówczas: istnieją stałe $C > 0$ oraz $\lambda > 0$ takie, że dla każdego $x \in \mathcal{A}$ zachodzi

$$\|T_t x - Px\| \leq Ce^{-\lambda t}\|x\| \qquad \text{dla każdego } \ t > 0$$

Ponadto $T_t P = PT_t$ dla każdego $t > 0$, tzn. $\mathcal{F}_T = RanP$.
Wynik został uzyskany dzięki zbadaniu zachowania się dyfuzji na grupie $G$. Warto zwrócić uwagę, że uzyskany rezultat dotyczy tzw. niesymetrycznych dyfuzji, tzn. z częścią $\delta_0 \neq 0$ ($X_0 \neq 0$ na poziomie dyfuzji na grupie), które to dyfuzje są znacznie trudniejsze do analizy od przypadku symetrycznego, tzn. $\delta_0 = 0$ (odpowiednio $X_0 = 0$). W literaturze rozważono jedynie symetryczną dyfuzję na zwartej grupie Liego z warunkiem $X_0 = 0$ i $X_1$,...,$X_m$ spełniały warunek Hörmandera.
Powyższą metodę zastosowano do analizy długoczasowego zachowania następującej półgrupy opisującej dynamikę ujemnie naładowanej cząstki kwantowej w $\mathbb{R}^3$ uwięzionej przez potencjał Coulomba wytworzony przez dodatnio naładowane jądro. Niech $\mathcal{H}$ oznacz odpowiednią przestrzeń Hilberta dla tej cząstki, Tr$(\mathcal{H})$ oznacza zbiór ograniczonych operatorów ze skończonym śladem. $\rho \in$Tr$(\mathcal{H})$ jest stanem cząstki, jeśli jest dodatnio określony oraz Tr$\rho = 1$. Rozważmy formalne wyrażenie

$$L^*\rho = -\mathbf{i}\,[L_3, \rho] + 2L_1\rho L_1 - L_1^2\rho - \rho L_1^2$$

gdzie operatory nieograniczone $L_1 = -\mathbf{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$ oraz $L_3 = -\mathbf{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ stanowią odpowiednio pierwszą i trzecią komponentę operatora momentu pędu. By przeprowadzić ścisłą analizę wprowadzono $\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ zbiór operatorów zwartych generowany przez projektory ortogonalne rzutujące na stany własne hamiltonianu opisującego atom wodoru. Zachodzi $\mathcal{K}(\mathcal{H})^* =$Tr$(\mathcal{H})$, zatem można rozważyć równanie na gęstym podzbiorze przestrzeni operatorów zwartych. Dokładniej rozważono pregenerator zbudowany z wyrażenia postaci $L = \delta_1^2 + \delta_0$, gdzie $\delta_0 = \mathbf{i}[L_3, \cdot]$ i $\delta_1 = \mathbf{i}[L_1, \cdot]$. Derywacje $\delta_0$ i $\delta_1$ tworzą algebrę grupy $SU(2)$. Za dziedzinę derywacji przyjęto zbiór generowany przez kombinacje liniowe projektorów na stany własne hamiltonianu atomu wodoru. Wówczas można sprawdzić potrzebne założenia i powyższa strategia może być użyta. W szczególności asymptotyczne zachowanie dyfuzji kwantowej uzyskuje się z zachowania dyfuzji na grupie $SU(2)$. W istocie grupę $SU(2)$ można zamienić na grupę $SO(3)$, gdzie działanie $\alpha$ tej grupy na algebrze $\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ dane jest formułą: $\alpha_g(x) = U_g x U_g^*$, i gdzie operatory unitarne $U_g$ działają w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^3, dm)$ w następujący sposób: $U_g\psi(\mathbf{r}) = \psi(g^{-1}\mathbf{r})$ dla każdego $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ oraz $g \in SO(3)$. Niech $V_t = e^{\mathbf{i}tH}$, $t \in \mathbb{R}$

jest jednowymiarową grupą unitarnych operatorów generowaną przez hamiltonian atomu wodoru $H$. Wówczas na algebrze $P(\mathcal{A})$ w myśl powyższego twierdzenia mamy do czynienia z efektywną dynamiką zadaną formułą:

$$W_t : P(\mathcal{A}) \longrightarrow P(\mathcal{A}) \qquad W_t = P(V_t(\,\cdot\,)V_t^*) \quad \text{dla każdego } \ t \in \mathbb{R}$$

Powyższa dynamika efektywna pochodzi od markowskiej półgrupy $\{T_t\}_{t\geq 0}$ zdefiniowanej wzorem $T_t = V_t \exp\left\{t\overline{L}\right\}$, gdzie $\overline{L}$ jest domknięciem wyżej rozważanego operatora $L$. Na koniec przechodząc do operatorów dualnych można uzyskać kwantową dynamikę markowską na przestrzeni $\mathrm{Tr}(\mathcal{H})$, której generator ma formalną postać:

$$-\mathbf{i}[H,\ \cdot\ ] - \mathbf{i}\,[L_3,\ \cdot\ ] + 2L_1(\ \cdot\ )L_1 - \left\{L_1^2,\ \cdot\ \right\}$$

gdzie $\{\cdot,\cdot\}$ oznacza antykomutator. Dynamika efektywna na $P^*(\mathrm{Tr}(\mathcal{H}))$, gdzie $P^*$ jest projektorem dualnym do projektora $P$, jest zadana przez derywację $-\mathbf{i}P^* \circ [H,\ \cdot\ ]$.
Warto odnotować że udało się znaleźć szacowanie na współczynnik opisujący szybkość dążenia do projektora rzutującego na algebrę stabilną: $\lambda = \frac{1}{20}$.
Główne narzędzia potrzebne do dowodu wyników można przenieść na przypadek ogólniejszych grup zwartych. Pozwala to w istocie przenieść powyższą analizę przy zaadaptowaniu założeń **(Z)** na przypadek nieskończenie wymiarowy poprzez odwołanie się do analizy na grupach zwartych jako wersji nieskończenie wymiarowej analizy grup i algebr Liego. Niech nieskończona rodzina derywacji $\{\delta_i\}_{i\in I}$ generuje nieskończenie wymiarową algebrę Liego $\mathfrak{g}$ w taki sposób, że istnieje rodzina częściowo uporządkowanych ideałów $\mathfrak{h}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, gdzie $\Lambda$ jest zbiorem skierowanym przez częściowy porządek $\prec$, taki, że $\mathfrak{h}_{\lambda'} \subset \mathfrak{h}_\lambda$ dla $\lambda \prec \lambda'$ oraz $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{h}_\lambda = \{0\}$. Ponadto, algebry Liego $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_\lambda$, których granicą rzutową jest $\mathfrak{g}$, są skończenie wymiarowe i posiadają generujący ją zbiór derywacji spełniających założenia **(Z)**. Odpowiadająca rodzina jednospójnych i zwartych grup Liego $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ będzie tworzyła system rzutowy, którego granicą rzutową jest pewna zwarta grupa $G$. Szczególną okolicznością jest, gdy układ derywacji $\{\delta_i\}_{i\in I}$ stanowi część tzw. *rzutowej bazy* algebry $\mathfrak{g}$ względem naturalnego układu Liego grupy $G$, tzn. skierowanego układu normalnych podgrup $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $H_{\lambda'} \subset H_\lambda$ przy $\lambda' \succ \lambda$, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda = \{e\}$ i takich, że $G_\lambda = G/H_\lambda$. Stosując powyższe rezultaty możemy zdefiniować działanie grupy $G_\lambda$ na algebrze $\mathcal{A}$ poprzez grupę automorfizmów $\alpha^\lambda_{[g]_\lambda}$, gdzie $[g]_\lambda \in G_\lambda$ jest obrazem przy kanonicznej projekcji elementu $g \in G$, i w konsekwencji rozważając odpowiednio skonstruowaną granicę uzyskać działanie $\alpha_g$, $g \in G$ na algebrze $\mathcal{A}$.
Ogólniej, niech $U_t$, $t \in \mathbb{R}$ jest jednoparametrową, ciągłą grupą automorfizmów grupy $G$ oraz $\mu_t$, $t \in [0,\infty)$ rodziną miar probabilistycznych na $G$,

która spełnia warunek $[U_{-t}]_*(\mu_s) * [U_{-s}]_*(\mu_t) = \mu_{s+t}$, $t, s > 0$, wówczas można rozważyć ogólniejszy typ półgrup $T_t(x) = \int_G \alpha_{U_t(g)}(x)\mu_t(dg)$, dla $x \in \mathcal{A}$. Przykładowo generator kwantowej półgrupy dynamicznej przy wyborze $U_t = \mathrm{id}_G$, $t \in \mathbb{R}$, która została uzyskana z wyjściowego zbioru derywacji $\{\delta_i\}_{i \in I}$ stanowiącego jednocześnie część wspomnianej wyżej bazy rzutowej, ma postać: $L = \sum_{i \in I} a_{ij}\delta_i \circ \delta_j + \sum_{i \in I} b_i \delta_i$, gdzie nieskończonej sumie można nadać sens przy użyciu odpowiedniego pojęcia granicy. $b_i \in \mathbb{R}$, $(a_{ij})$ jest rzeczywistą, symetryczną, dodatnio określoną macierzą. Rdzeń operatora $L$ również może zostać opisany szczegółowo.

Badanie nieliniowych układów dynamicznych w kontekście kwantowej teorii ma swoją długą tradycję. Z jednej strony są to formy poszukiwania nowego matematycznego przeformułowania istniejącej teorii kwantowej w taki sposób, aby móc ująć w jedną całość liniowe i nieliniowe aspekty teorii kwantowej takie, jak np. omawiane zjawisko dekoherencji. Z drugiej strony jest wyrażane przekonanie o obecności nieliniowości w mechanice kwantowej jako śladu pewnej bardziej fundamentalnej teorii o charakterze nieliniowym. Przy czym postulowana nieliniowość powinna wchodzić w taki sposób do mechaniki kwantowej, aby ta nieliniowa teoria przechodziła w schrödingerowską mechanikę w skali atomowej, tj. skali, przy której obowiązuje zasada superpozycji. Innymi słowy zjawisko dekoherencji nie wymaga wyjaśnienia, bo zasada superpozycji jest przybliżonym efektem wtórnym wynikającym z postulowanej bardziej podstawowej teorii. Niezależnie od zasadności i wagi tych rozważań w nurcie tym pojawiają się interesujące matematyczne modele godne uwagi. Motywacja do tej części badań jest inna i nie należy jej łączyć z tą powyżej opisaną.
Przykłady nieliniowości w fizyce kwantowej, o charakterze mniej fundamentalnym od wspomnianych, dostarcza nam np. fizyka jądrowa, gdzie nieliniowość jest wynikiem wprowadzenia tarcia na poziomie mikroświata. Inne przykłady nieliniowości spotykamy w kwantowych układach złożonych z wielu ciał. Np. podjęto próbę uogólnienia warunku KMS do tzw. lokalnego warunku KMS, który ma opisywać nierównowagowe stany stacjonarne, z którymi nie jest już związana jedna określona wartość temperatury układu. Z kolei w innych pracach wprowadzono pojęcie nieliniowego kwantowego układu dynamicznego jako formy uogólnienia nieliniowych procesów Markowa. Równania ewolucji zostały sformułowane w przestrzeni stanów układu kwantowego ale również wprowadzano nieliniowe równania różniczkowe dla ewoluujących w czasie elementów algebry obserwabli. W prezentowanych badaniach zawarta jest propozycja sformułowania markowskiej dynamiki kwantowej bezpośrednio na przestrzeni obserwabli układu kwantowego. Jedną

z motywacji do badań rozpoczętych w tej pracy jest sformułowanie odpowiednich twierdzeń opisujących własności długoczasowych zachowań takich dynamik i w szczególności zwrócenie uwagi na występowanie dynamik efektywnych. Za pewną inspirację można uznać następujący poglądowy model dynamiki na algebrze $\pi_{\omega_0}(\mathcal{A})''$[5]

$$\dot{x}_t = L_0(x_t) + \delta^2(\phi(x_t)) \qquad x_t \in \pi_{\omega_0}(\mathcal{A})'' \quad \text{dla} \quad t \geq 0 \tag{4}$$

operator $L_0$ i derywacja $\delta$ zostały skonstruowane w pierwszym modelu zaprezentowanym w tym streszczeniu (porównaj z (1)). Część nieliniowa pochodzi od funkcji $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Przykładowo $\phi(\lambda) = |\lambda|^{m-1}\lambda$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$ i $m > 1$. Człon nieliniowy stojący w tym równaniu można identyfikować z *nieliniową kwantową dyfuzją*: ignorując człon z $L_0$ a następnie zastępując w sposób formalny $\delta^2$ przez operator Beltramiego-Laplaca $\Delta$ działający na pewnej rozmaitości $M$, oraz zastępując elementy algebry $x_t$ przez pewne funkcje $f_t$ określone na rozmaitości $M$ uzyskamy równanie ewolucji w postaci $\dot{f}_t = \Delta(\phi(f_t))$, które identyfikuje się z pewną podklasą tzw. dyfuzji nieliniowych. Dyfuzje nieliniowe ciągle stawiają wyzwania dla matematyków, w tym opis długoczasowego zachowania się takich dyfuzji.
Jedną z ambicji podjętych badań jest uzyskanie nieliniowej dyfuzji jako efektywnej dynamiki. W szczególności oczekuje się, podobnie jak to zostało opisane w liniowej teorii, że powyższy układ opisany równaniem (4) jest efektywnym układem dynamicznym, którego efektywna dynamika odpowiada pewnej dyfuzji nieliniowej odbywającej się na okręgu $S^1$. W ogólności długoczasowe zachowanie nieliniowych półgrup prowadzi w naturalny sposób do większego zakresu możliwości. W szczególności asymptotyczne zbiory niezmiennicze mogą być teraz nieliniowymi rozmaitościami, np. stożkami, jak to demonstrują rozważane przykłady. Badania przedstawiane mają również statut badań czysto matematycznych: praca zawiera propozycję rozszerzenia pojęcia kwantowej markowskiej półgrupy na nieliniowe przypadki.
Niech $D \subset \mathcal{A}$ i $D$ jest domkniętym podzbiorem, który nie jest pusty. Funkcję $t \in [0, +\infty) \longrightarrow S_t \in \mathrm{Map}(D, D)$ taką, że:
(1) $S_t S_r = S_{t+r}$, $S_0 = \mathrm{id}_D$
(2) dla każdego $x \in D$ zachodzi $S_t(x) \to x$ dla $t \to 0^+$
(3) dla pewnej liczby rzeczywistej $\omega$ zachodzi $\|S_t(x) - S_t(y)\| \leq e^{\omega t}\|x - y\|$
nazywamy *półgrupą Lipschitza (typu $\omega$)*.
Podobnie, jak w przypadku liniowym, półgrupy te można zbudować w oparciu o pojęcie generatora, chociaż statut tego pojęcia jest inny niż w teorii liniowej. Zbiór wszystkich (unormowanych) funkcjonałów stycznych elementu $x$ oznaczamy przez $J(x)$. Niech $F : \mathcal{A} \longrightarrow 2^{\mathcal{A}}$. Dziedziną $D(F)$ od-

[5] algebra von Neumanna generowana przez algebrę Glimma w reprezentacji śladu

wzorowania $F$ jest zbiór tych elementów $x \in \mathcal{A}$ dla których $F(x) \neq \emptyset$. Z kolei przeciwdziedzinę określa się jako $R(F) = \bigcup_{x \in D(F)} F(x)$. Powiemy, że odwzorowanie $F$ jest *dyssypatywne*, jeśli dla każdej pary różnych elementów $x_1, x_2 \in D(F)$ można znaleźć element $\phi \in J(x_1 - x_2)$ taki, że

$$\mathrm{Re}\phi(y_1 - y_2) \leq 0 \qquad \text{dla każdego} \qquad y_1 \in F(x_1), y_2 \in F(x_2)$$

Operator jest *ściśle dyssypatywny* jeśli powyższy warunek zachodzi dla każdego $\phi \in J(x_1 - x_2)$. W końcu odwzorowanie dyssypatywne $F$ nazwiemy *m-dyssypatywnym* jeśli dla pewnej liczby $\lambda > 0$ zachodzi $R(I - \lambda F) = \mathcal{A}$. Odnotujmy, że z każdym odwzorowaniem m-dyssypatywnym możemy stowarzyszyć pewną Lipschizowską półgrupę ($\omega = 0$). Odnotujmy również, że w badaniach zostały użyte bardziej ogólne warunki[6] niż wymieniona m-dyssypatywność: są to tzw. *range condition* jakie nakłada się na operatory dyssypatywne. Wprowadźmy warunek *jednopunktowej dyssypatywności* odwzorowania $F$: dla każdego niezerowego $x \in D(F)$ można znaleźć element $\phi \in J(x)$ taki, że

$$\mathrm{Re}\phi(y) \leq 0 \qquad \text{dla każdego} \qquad y \in F(x)$$

W teorii nieliniowych operatorów pojawia się szereg nowych pojęć, których wyróżnienie w liniowej teorii nie ma sensu. Jednym z nowych pojęć jest *wypukłość w zawężonym sensie* zbioru $D \subset \mathcal{A}$: jeśli dla każdej pary punktów $x_1, x_2 \in D$ można wskazać taką liczbę $\delta$ z przedziału otwartego $(0, 1)$, że kombinacja wypukła $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in D$ dla każdego $\lambda \in (0, \delta) \cup (1 - \delta, 1)$. Wprowadźmy też oznaczenia: $D_{sa}$ to zbiór elementów postaci $\frac{1}{2}(x+x^*)$, gdzie $x \in D$; $D_{as}$ to zbiór elementów postaci $\frac{1}{2\mathbf{i}}(x - x^*)$, gdzie $x \in D$; sam element $\frac{1}{2\mathbf{i}}(x - x^*)$ będziemy często oznaczać przez $\mathrm{Im}x$; $D^\dagger$ to zbiór elementów postaci $x^*$, gdzie $x \in D$; $D^c = \mathcal{A} \backslash D$ i w końcu, jeśli $D \subset \mathcal{A}$ jest podzbiorem $C^*$-algebry, to $\overline{D}$ będzie oznaczać domknięcie zbioru $D$ w normie algebry $\mathcal{A}$. Rozważmy odwzorowanie $S : D \longrightarrow D$. Powiemy, że:

(1) $S$ jest *nierozszerzające*, jeśli $\|S(x) - S(y)\| \leq \|x - y\|$ dla każdego $x, y \in D$

(2) $S$ jest *zwężające*, jeśli $\|S(x)\| \leq \|x\|$ dla każdego $x \in D$

(3) $S$ jest $*$*-symetryczne*, jeśli $D$ jest $*$-gwiazdka niezmienniczy oraz $S(x^*) = S(x)^*$ dla każdego $x \in D$

(4) $S$ jest *rzeczywiste*, jeśli $D \cap \mathcal{A}_{sa} \neq \emptyset$ oraz $S(x) \in \mathcal{A}_{sa}$ dla każdego $x \in D \cap \mathcal{A}_{sa}$

(5) $S$ jest *dodatnie*, jeśli $D \cap \mathcal{A}_+ \neq \emptyset$ oraz $S(x) \in \mathcal{A}_+$ dla każdego $x \in D \cap \mathcal{A}_+$

(6) $S$ jest *silnie dodatnie*, jeśli $S(x^*)S(x) \leq S(x^*x)$ dla każdego $x \in D$ takiego, że $x^*x \in D$

[6]jak również rozważa się półgrupy lipschitzowskie z $\omega \neq 0$

(7) $S$ jest *monotoniczny*, jeśli $S$ jest rzeczywiste oraz dla każdego $x, y \in D \cap \mathcal{A}_{sa}$ $x \leq y \Rightarrow S(x) \leq S(y)$
(8) $S$ jest *unitalny* (*subunitalny*), jeśli $\mathbf{1} \in D$ oraz $S(\mathbf{1})$ ($S(\mathbf{1}) \leq \mathbf{1}$).
Rozważono szereg relacji porządku dla niepustych podzbiorów $A$ i $B$ algebry $\mathcal{A}$. W szczególności powiemy, że $B$ jest 3-większy od $A$, co zapisujemy symbolem $A \prec_3 B$, jeśli zachodzi: dla każdego elementu $x_1 \in A$ istnieje element $x_2 \in B$ taki, że $\mathrm{Re}(x_2 - x_1) \in \mathcal{A}_+$. Mając powyższe pojęcia zaproponowano następujące pojęcie dyssypacji: $F : D(F) \longrightarrow 2^{\mathcal{A}}$ nazywamy *dyssypacją* jeśli dziedzina wraz z każdym elementem $x \in D(F)$ zawiera w sobie $x^* x$ oraz zachodzi

$$F(x)^\dagger x + x^* F(x) \prec_3 F(x^* x)$$

W pracy zostało zaproponowane też następujące pojęcie kwantowej półgrupy markowskiej. Niech $D \subset \mathcal{A}$ będzie domkniętym podzbiorem $*$-niezmienniczym takim, że $\mathcal{A}_+ \cap D \neq \emptyset$. Półgrupę Lipschitza $S_t : D \longrightarrow D$, $t \geq 0$ nazwiemy *kwantową półgrupą Markowa*, jeśli dla każdego $t > 0$ odwzorowanie $S_t$ jest: rzeczywiste, dodatnie, zwężające i subunitalne. Kwantową półgrupę Markowa nazwiemy kwantową półgrupą *$*$-markowską*, jeśli dodatkowo $S_t$ są $*$-symetryczne; *zachowawczą* jeśli $S_t$ są unitalne i *monotoniczną*, jeśli $S_t$ są monotoniczne.
W przeciwieństwie do przypadku liniowych półgrup, gdzie markowskość można zdefiniować warunkiem dodatniości i subunitalności, wymienione własności są niezbędne. Przykładowo, jak pokazano, dodatniość nie implikuje monotoniczności; półgrupa może być zwężająca jednocześnie będąc nie nierozszerzającą. Z kolei $*$-symetryczność pociąga za sobą rzeczywistość o ile $D \cap \mathcal{A}_{sa} \neq \emptyset$ jak w przypadku liniowym.
Dla liniowych operatorów gęsto określonych warunek dyssypatywności jest równoważny ścisłej dyssypatywności. W przypadku nieliniowym pokazano, że dyssypatywne odwzorowanie może nie być ściśle dyssypatywne. Z drugiej strony istnieje motywacja badania ścisłej dyssypatywności, np. w teorii zaburzeń. Poniższe twierdzenie zachodzi w dowolnej przestrzeni Banacha:
Dyssypatywne odwzorowanie $F - \omega I$, $\omega \in \mathbb{R}$ jest ściśle dyssypatywne jeśli:
(1)$D(F)$ jest lokalnie wypukły i wypukły w zawężonym sensie
(2)$R(F)$ jest zawarty w domknięciu powłoki wypukłej dziedziny $D(F)$
(3)$F$ jest hemi-półciągły od dołu w topologii normy.
Kolejną istotną własnością jest warunek rzeczywistości i $*$-symetryczności. Funkcja $M : D \longrightarrow [0, +\infty)$ jest *lokalnie ograniczona* na $\overline{D}$ jeśli istnieje odwzorowanie $r : \overline{D} \longrightarrow (0, +\infty)$ takie, że dla każdego $x \in \overline{D}$

$$\sup\{|M(y)| \ : \ y \in D \cap K(x, r(x))\} < \infty$$

gdzie $K(x, r)$ jest kulą otwartą o promieniu $r$. Przyjęto założenia dla $D(F)$: $\overline{D(F) \cap \mathcal{A}_{sa}} = \overline{D(F)} \cap \mathcal{A}_{sa}$, $\overline{D(F) \cap \mathcal{A}_+} = \overline{D(F)} \cap \mathcal{A}_+$, $D(F) \cap \mathcal{A}_+ \neq \emptyset$,

$\overline{D(F)} = \overline{D(F)^{\dagger}}$. Poniżej przyjmiemy m-dyssypatywność $F$ (rozważano również ogólniejsze założenia niż m-dyssypatywność):
Niech $M : D(F) \longrightarrow [0, \infty)$ jest lokalnie ograniczoną funkcją na dziedzinie $\overline{D(F)}$ taką, że

$$F(x)_{as} \cap \{\lambda \mathrm{Im} x \ : \ \ \lambda > M(x)\} = \emptyset \qquad \text{dla każdego} \quad x \in D(F) \cap \mathcal{A}_{sa}^{c} \tag{5}$$

Wówczas półgrupa $\{S_t\}_{t \geq 0}$ działająca w zbiorze $\overline{D(F)}$ jest rzeczywista. Jeśli dodatkowo $F(x^*) = F(x)^{\dagger}$ dla każdego $x \in D(F) \cap \mathcal{A}_{sa}^{c}$, to $\{S_t\}_{t \geq 0}$ jest $*$-symetryczna.
Przy założeniu (5) i dodatkowym założeniu istnienia funkcji $M_+ : D(F) \cap \mathcal{A}_{sa} \longrightarrow [0, \infty)$ lokalnie ograniczonej na $\overline{D(F)} \cap \mathcal{A}_{sa}$ takiej, że

$$F(x) \cap B_x = \emptyset \qquad \text{dla każdego} \ \ x \in D(F) \cap \mathcal{A}_{sa} \cap \mathcal{A}_{+}^{c}$$

gdzie $B_x = \bigcup_{\lambda > M_+(x)} \{y \in \mathcal{A}_{sa} \ : \ \ y \leq \lambda x\}$ pokazano: półgrupa $\{S_t\}_{t \geq 0}$ jest rzeczywista i dodatnia.
Również pokazano pewną wersję twierdzeń odwrotnych do powyżej sformułowanych przy pewnych wzmocnionych założeniach o istnieniu słabego generatora dla półgrupy $\{S_t\}_{t \geq 0}$. W szczególności te odwrotne twierdzenia dają możliwość przekonania się, że lista założeń powyżej przyjętych jest uogólnieniem warunków koniecznych, jakie należałoby nałożyć na odwzorowanie $F$.
Przedyskutowano również pewne warunki, które dają bezpośrednią kontrolę nad dodatniością i samosprzężonością elementów $S_t(x)$. Przykładowo rozważono warunek dający następującą kontrolę nad samosprzężonością elementów $S_t(x)$: istnieje stała $M \geq 0$ taka, że dla każdego elementu $x \in D(F) \cap \mathcal{A}_{sa}^{c}$ i każdego $x' \in F(x)$ istnieje funkcjonał $\phi \in J(\mathrm{Im} x)$ taki, że

$$\mathrm{Re}\phi \left(\mathrm{Im} x' - M \mathrm{Im} x\right) \leq 0 \tag{6}$$

Niech istnieje stała nieujemna $M_1$ taka, że dla każdego wyboru elementów $x_1, x_2 \in D(F) \cap \mathcal{A}_{sa}$ takiego, że $x_2 - x_1 \in \mathcal{A}_{+}^{c}$ i każdego wyboru elementów $x_1' \in F(x_1)$ i $x_2' \in F(x_2)$ można wskazać $\phi \in J((x_2 - x_1)^{-})$ taki, że

$$\mathrm{Re}\phi(x_2' - x_1') \geq -M_1 \|(x_2 - x_1)^{-}\| \tag{7}$$

Niech poniżej $F$ jest jednopunktowo dyssypatywny, spełnia warunki opisane w (6) oraz (7). Jeśli dodatkowo: $F(0)_{sa} \cap \mathcal{A}_+ \neq \emptyset$ i $F(\mathbf{1})_{sa} \cap (-\mathcal{A}_+) \neq \emptyset$, to wówczas półgrupa $\{S_t\}_{t \geq 0}$ jest monotoniczną kwantową półgrupą Markowa. Jeśli $F$ jest dodatkowo dyssypacją, to wówczas półgrupa $\{S_t\}_{t \geq 0}$ jest silnie dodatnią i monotoniczną kwantową półgrupą Markowa.

**Podsumowanie.** Bez wątpienia na obraz postrzeganego przez nas makroświata składa się cały szereg procesów zachodzących w kwantowym mikroświecie. Przedstawiony kierunek badań i zaprezentowane wyniki dotyczące efektywnych dynamik otwartych kwantowych układów dynamicznych w przekonaniu autora stanowią dobrze wypracowaną podstawę do dalszego rozwoju matematycznych modeli w teorii kwantowej odnoszących się do klasycznych własności układów fizycznych. W szczególności dotyczy to konstruowania modeli na algebrach von Neumanna typu $III$, które są niełatwym matematycznym wyzwaniem ale silnie umotywowanym tym, że odpowiadają one układom fizycznym chociażby poprzez fakt, że każdemu makroskopowemu ciału fizycznemu, w warunkach równowagi termodynamicznej, można przypisać określoną temperaturę. Mikroskopowy, w szczególności kwantowy, opis układów ze stacjonarnym rozkładem temperatury będących najprostszymi przykładami nierównowagowych układów, stanowi ciągle interesujący przedmiot badań matematycznych. Uzasadnienie na gruncie matematycznej teorii występowania stacjonarnych rozkładów temperatury wydaje się tkwić w bardziej dogłębnym zrozumieniu i opisaniu na poziomie kwantowego mikroświata mechanizmu prowadzącego do powstania i przypisania temperatury układom makroskopowym, która jest jednym z przykładów kolektywnych wielkości fizycznych używanych do opisu zjawisk w skali makroświata i których źródło powstania należy upatrywać w mikroświecie.
Efektywne układy dynamiczne wydają się dostarczać pewnej matematycznej metody wyodrębniania wielkości o charakterze kolektywnym stowarzyszonych z zadanym układem przy jednoczesnym wyznaczeniu prawa ewolucji jakim one podlegają. W istocie pełne wykorzystanie przedstawianej metody do opisu kolektywnych zjawisk może się ujawnić, gdy umocuje się ją na gruncie bardziej podstawowej teorii fizycznej. Dotyczy to zwłaszcza nieliniowych efektywnych układów dynamicznych, gdzie, z jednej strony wydaje się rzeczą atrakcyjną przedstawienie nieliniowych zjawisk jako efektywnych dynamik kwantowych nieliniowych półgrup, przy, z drugiej strony, jednoczesnym braku kanonicznych metod wprowadzania tych ostatnich na gruncie obecnie znanych teorii fizycznych.
Tak zwana niekomutatywna geometria różniczkowa przypuszczalnie dostarcza przykład języka matematycznego pozwalającego na budowę bardziej podstawowej teorii fizycznej niż teoria kwantowa, na której bazują badania opisane w przedstawianej rozprawie. Połączenie tego nurtu z nurtem badań zaprezentowanym może w przyszłości zaowocować interesującymi modelami efektywnych układów dynamicznych. Postęp w dziedzinie efektywnych układów dynamicznych można więc również łączyć z rozwojem matematycznych teorii fizycznych o charakterze bardziej fundamentalnym niż znana obecnie teoria kwantowa.