Autoreferat

1. Imię i nazwisko

Mariusz Żaba

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

magisterium (fizyka)	Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Opolskiego, 2002 r. Tytuł pracy: *"Zmiany struktury tlenków metali w wyniku intensywnego mielenia"* Promotor: prof. dr hab. Tadeusz Górecki
magisterium (matematyka)	Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Opolskiego, 2004 r. Tytuł pracy: *"Zastosowanie metod stochastycznych w matematycznym modelowaniu własności substancji stosowanych w komputerach kwantowych"* Promotor: prof. dr hab. Vladimir Stephanovich
doktorat (fizyka)	Wydział Fizyki i Astronomii Uniwersytetu Wrocławskiego, 2010 r. Tytuł pracy: *"Nieodwracalna dynamika kwantowych układów optycznych"* Promotor: prof. dr hab. Robert Olkiewicz

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

2010 -	adiunkt, Instytut Fizyki, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Opolskiego

4. Wskazanie osiągnięcia stanowiącego podstawę postępowania habilitacyjnego

Jako osiągnięcie naukowe wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.) wskazuję jednotematyczny cykl publikacji podejmujący i rozwiązujący (w opisanym poniżej zakresie) problem: ***"Stany związane operatorów nielokalnych: przypadek ultrarelatywistyczny".***

4. a. Wykaz prac stanowiących jednotematyczny cykl publikacji

Na cykl pt. ***"Stany związane operatorów nielokalnych: przypadek ultrarelatywistyczny"*** składa się 10 prac opublikowanych w latach 2013-2016:

[A1] **M. Żaba**, P. Garbaczewski, V. Stephanovich, *Levy flights in confining environments: Random paths and their statistics*, Physica A **392**, (2013), 3485-3496,

[A2] **M. Żaba**, P. Garbaczewski, *Thermalization of Levy flights: Path-wise picture in 2D*, International Journal of Statistical Mechanics, vol. 2013, (2013), 738345, (1-12),

[A3] **M. Żaba**, P. Garbaczewski, V. Stephanovich, *Path-wise versus kinetic modeling for equilibrating non-Langevin jump-type processes*, Cent. Eur. J. Phys. **12** (3), (2014), 175-184,

[A4] **M. Żaba**, P. Garbaczewski, *Solving fractional Schrdinger-type spectral problems: Cauchy oscillator and Cauchy well*, J. Math. Phys. **55** (9), (2014), 092103, (1-20),

[A5] P. Garbaczewski, **M. Żaba**, *Nonlocally-induced (quasirelativistic) bound states: Harmonic confinement and the finite well*, Acta Phys. Pol. B **46** (5), (2015), 949-981,

[A6] P. Garbaczewski, **M. Żaba**, *Nonlocal random motions and the trapping problem*, Acta Phys. Pol. B **46** (2), (2015), 231-246,

[A7] **M. Żaba**, P. Garbaczewski, *Nonlocally-induced (fractional) bound states: Shape analysis in the infinite Cauchy well*, J. Math. Phys. **56** (12), (2015), 123502, (1-21),

[A8] E. V. Kirichenko, P. Garbaczewski, V. Stephanovich, **M. Żaba**, *Ultrarelativistic (Cauchy) spectral problem in the infinite well*, Acta Phys. Pol. B **47** (5), (2016), 1273-1290,

[A9] E. V. Kirichenko, P. Garbaczewski, V. Stephanovich, **M. Żaba**, *Levy flights in the infinite potential well as the hypersingular Fredholm problem*, Phys. Rev. E **93**, (2016), 052110, (1-10),

[A10] **M. Żaba**, P. Garbaczewski, *Ultrarelativistic bound states in the spherical well*, J. Math. Phys. **57** (7), (2016), 072302, (1-26).

4. b. Omówienie celu naukowego i wyników prac [A1-A10]

Procesy losowe z gaussowskim szumem były od dziesięcioleci intensywnie badane w literaturze, począwszy od pionierskich prac Smoluchowskiego na temat ruchów Browna [1]. Należą one do szerszej klasy procesów, o niezależnych i stacjonarnych przyrostach, nazywanych procesami Lévy [2–4] zobacz też [5, 6]. Niech X_t będzie procesem Lévy na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o wartościach w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^d$. Dzięki znanemu wzorowi Lévy-Chinczyna, bogatą klasę procesów Lévy można scharakteryzować podając funkcję charakterystyczną $E[\exp(i < p, X_t >)] = \exp(-tF(p))$, gdzie

$$F(p) = \frac{1}{2} < p, Ap > -i < b, p > - \int\limits_{\mathbb{R}^d - \{0\}} \left[e^{i<p,y>} - 1 - i < p, y > 1_{||y|| \leqslant 1}\right] \nu(dy), \qquad (1)$$

natomiast A jest macierzą dodatnio określoną, b wektorem, a miara ν spełnia warunek

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d - \{0\}} \left(||y||^2 \wedge 1\right) \nu(dy) < \infty. \qquad (2)$$

Rodzina procesów Lévy jest bardzo bogata, szczególnymi jej przypadkami są procesy: Poissona, Gamma, Wienera czy wreszcie symetryczne procesy α-stabilne z wykładnikiem funkcji charakterystycznej $F_\alpha(p) = |p|^\alpha$, gdzie $\alpha \in (0, 2)$, czy procesy relatywistyczne z wykładnikiem $F^m(p) = \sqrt{p^2 + m^2} - m$, $m \geqslant 0$ (co jest przeskalowaną klasyczną wersją relatywistycznego hamiltonianu $\sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} - mc^2$, gdzie c jest prędkością światła w próżni $(c \equiv 1)$). Jedynym procesem należącym zarówno do klasy procesów α - stabilnych jaki i relatywistycznych $(F_1(p) = F^0(p) = |p|)$ jest proces ultrarelatywistyczny, nazywany także procesem Cauchy. Wśród całej klasy procesów α-stabilnych (od lat intensywnie badanych), to właśnie procesy ultrarelatywistyczne wydają się mieć uchwytny sens fizyczny. Procedura kwantowania wymaga wprowadzenia przestrzeni Hilberta (np. $L^2(\mathbb{R}^n)$) i zastąpieniu parametru p operatorem pędu $p \to \hat{p} = -i\nabla$, $(\hbar \equiv 1)$ [7]. Wynikiem kwantowania jest generator procesu $|\nabla| = (-\Delta)^{1/2}$, którego jawna postać zależy od przestrzeni na jakiej działa. Jawna postać przestrzeni Hilberta zostanie zdefiniowana w dalszej części pracy. Generatory procesów nieskończenie podzielnych są w ogólności nielokalne, pozwalają zdefiniować półgrupy Lévy-Schrödingera, a odpowiadające im procesy losowe są określane mianem "typu skokowego", jak i wychodzące poza tradycyjny inwentarz procesów skokowych (dopuszczalne są tu skoki o dowolnie małej długości jak i te o dowolnie dużej długości). Nielokalne operatory $(-\Delta)^{1/2}$ są istotnymi narzędziami tak zwanej ułamkowej mechaniki kwantowej [8–12]. Idea pochodnych ułamkowych to pomysł nie nowy. Pierwsza (udokumentowana) wzmianka na ich temat pojawiła się w liście G. W. Leibnitza do de l'Hospitala w 1695r, w którym nie wykluczył on istnienia pochodnej rzędu 1/2. Niemniej jednak istotny rozwój tej dziedziny sięga lat 70-tych ubiegłego stulecia [13]. Formalizm ułamkowej mechaniki kwantowej, opracowany do tej pory nie jest niestety konsystentny, ani wolny od spornych poglądów, szczególnie w kontekście problemów spektralnych, które pojawiają się przy zaburzeniu ich (lokalnymi) potencjałami więżącymi.

W ostatnich latach procesy Lévy cieszą się szczególnym zainteresowaniem. Dzieje się tak za sprawą licznie pojawiających się przykładów "świata realnego", których ewolucja jest wyraźnie niegaussowska. W rzeczywistości procesy Lévy okazały się być wszechobecne i empirycznie obserwowalne w rozmaitych obszarach badań: w fizyce (anomalna dyfuzja, przepływ turbulentny, nieliniowej dynamice hamiltonowskiej [14, 15], optyce [16]), biologii (bicie serca [17], sieci neuronowe [18]), sejsmologii (zapisy aktywności sejsmicznej [19]), inżynierii przetwarzania sygnałów [20–22], ekonomii [23] (finansowe szeregi czasowe [24, 25]) i wielu innych. Istnieje zatem silna potrzeba opisu rzeczywistości w języku matematyki, znajdowania rozwiązań podstawowych problemów, a także proponowania nowych rozwiązań eksperymentalnych, weryfikacji lub wykluczenia nowych hipotez dotyczących np. szczegółowej dynamiki na poziomie mikroskopowym. Nie trzeba przekonywać żadnego "poważnego" fizyka jak ważnym zagadnieniem mechaniki kwantowej są zagadnienia skończonej, bądź nieskończonej studni, czy zagadnienie kwantowego oscylatora harmonicznego i jak wielką grupę eksperymentów można wyjaśnić używając tego języka. Mamy nadzieję, że podjęte przez nas badania więzionych procesów ultrarelatywistycznych dadzą nowe idee i nowy impuls do badań doświadczalnych.

Literatura dotycząca rozwiązań spektralnych ultrarelatywistycznych operatorów z wiążącymi potencjałami jest dość uboga. Jedynie nieliczne zagadnienia własne są rozwiązane, nie mówiąc już o rozwiązaniach analitycznych. Przykładem takiego analitycznego wyniku jest zagadnienie własne ultrarelatywistycznego operatora z potencjałem harmonicznym w jednym wymiarze [26, 27]. Rozwiązania te nie są elementarne (całki z iloczynów funkcji trygonometrycznych i funkcji Airy). Znane są także rozwiązania analityczne dla operatora $(-\Delta)^{1/2}$ z potencjałem anharmonicznym $V(x) = x^4$ w postaci uogólnionych funkcji Airy [28, 29]. Zagadnienia własne z potencjałami typu nieskończona studnia czy skończona studnia o głębokości V_0, wydawało by się elementarne, nie doczekały się jeszcze ścisłego rozwiązania. Co prawda w [8–12] pojawiły się "rozwiązania" nieskończonej studni, jednak stoją one w ewidentnej sprzeczności z przybliżeniami otrzymanymi w pracach profesjonalnych matematyków [30–34]. Pojawiające się różnice w obu podejściach są powodem szerokiej i ożywionej dyskusji i stanowią klasę zagadnień, które należy wyjaśnić, najlepiej przy użyciu zupełnie odmiennych metod. Prace, które zostaną za chwilę omówione są odpowiedzią na postawiony przed chwilą problem. Zagadnienia oscylatora harmonicznego i anharmonicznego są jak dotąd jedynymi zagadnieniami własnymi procesu Cauchy rozwiązanymi ściśle w jednym wymiarze przestrzennym. W przestrzeniach o większej liczbie wymiarów sytuacja wygląda jeszcze gorzej. Znane jest rozwiązanie ułamkowego operatora Cauchy w przestrzeni trójwymiarowej z potencjałem harmonicznym ale jedynie dla $l = 0$ (rozwiązanie radialne). Żadne rozwiązanie z $l \neq 0$ nie jest znane nawet dla potencjału harmonicznego [35]. Problem trójwymiarowego procesu α-stabilnego w potencjale sferycznej symetrycznej kuli, co zaskakujące, został podjęty niedawno [36, 37], gdzie znaleziono ograniczenia na wartości własne, związki między wartościami własnymi w 3D i 1D. Co prawda pojawiły się tam funkcje sferyczne, sugerujące związki z orbitalnym momentem pędu, jednak zagadnienia z $l \neq 0$, zostały odstawione na bok. Dlatego też zagadnienie stanów związanych procesu ultrarelatywistycznego w potencjale studni zarówno w jednym jak i w trzech wymiarach wymaga głębokiej analizy.

Nieco lepiej wygląda sytuacja dla zagadnień własnych operatora quasirelatywistycznego. Zagadnienia spektralne w przestrzeni trójwymiarowej quasirelatywistycznych operatorów w obecności potencjału harmonicznego, potencjału Coulomba były szeroko badane głównie w fizyce wysokich energii (najczęściej wspieranej numerycznie) [60, 73], w fizyce matematycznej [74–76] i zagadnieniach stabilności materii [77].

Rozprawa poświęcona jest problemom spektralnym operatorów ultrarelatywistycznych z potencjałami wiążącymi. Metody zawarte w pracach [A1-A10] mogą być rozwinięte (i niejednokrotnie są) na klasę dowolnych symetrycznych procesów α-stabilnych czy procesów relatywistycznych. W pracach [A1-A3] przedstawiamy efektywny algorytm pozwalający konstruować trajektorie procesów stabilnych i wyznaczać ich statystykę. Zaprezentowane tam procesy asymptotycznie dążą do równowagi typu Boltzmanowskiego, a metoda ich konstrukcji nie jest równoważna standardowemu opisowi przy pomocy równań Langevina. Praca [A3] porównuje metodę statystyk trajektorii prezentowaną w [A1, A2] z kinetycznym modelowaniem równania mistrzowskiego, dającego się przybliżać metodami różnic skończonych. Rozwiązania spektralne z potencjałem studni przedstawione w [A4, A5] były możliwe dzięki przygotowaniu i przetestowaniu numerycznego algorytmu, który pozwolił na dokładne wyznaczenie wartości własnych i kształtu funkcji własnych. W [A4] zaprezentowano metodę otrzymywania rozwiązań równania własnego i przeanalizowano rozwiązania dla procesu Cauchy więzionego potencjałem harmonicznym i potencjałem prostokątnej studni. Praca [A5] dotyczy procesów quasirelatywistycznych i prezentowanie jej w rozprawie stanowi test stosowania metod numerycznych, na szerszą klasę procesów niż proces Cauchy. Niejednokrotnie analiza szerszego zagadnienia rzuca lepsze światło na przypadek szczegółowy. Praca [A6] jest próbą pogodzenia nielokalnych procesów Lévy z problemem wymuszonym przez więzy (pułapkowanie wewnątrz studni potencjału). Próba uchwycenia mechanizmu pułapkowania dla procesów z warunkami brzegowymi Dirichleta jest bardzo interesująca, szczególnie w kontekście procesów skokowych. W [A7-A10] przeanalizowano zagadnienia spektralne operatora Cauchy ograniczonego do skończonego odcinka nieskończonymi barierami potencjału. Pierwsze trzy z nich dotyczą przypadku jednowymiarowego, natomiast w ostatniej rozwinięto metodę na przypadek trójwymiarowy. W [A10] pojawiły się po raz pierwszy rozwiązania nietrywialnych przypadków z $l \neq 0$ ultrarelatywistyczengo procesu w niestkończonej trójwymiarowej symetrycznej studni.

I. Statystyka trajektorii procesów Lévy w potencjałach wiążących [A1-A3].

Paragraf ten poświęcimy omówieniu prac [A1-A3]. Uogólnienie równań transportu na procesy niegaussowskie zwyczajowo zadaje się przez odpowiednią modyfikację szumu w tradycyjnych równaniach Langevina [38]. Istnieją jednak układy, dla których takie uogólnienie nie jest możliwe [39–43]. Innym sposobem uogólnienia dynamiki na procesy niegaussowskie jest modyfikacja równania Schrödingera (które dla ruchu Browna jest równoważne równaniu Fokkera-Plancka [44]), polegająca na zastąpieniu laplasjanu jego ułamkową wersją [46, 62]. Tak uogólnione równanie daje się transformować do równania, które nazywamy ułamkowym uogólnionym równaniem Fokkera-Plancka [39, 42, 43], jedynie w przypadku tzw. gradientowego zaburzenia ułamkowego Laplasjanu. Ten sposób uogólnienia dynamiki na procesy niegaussowskie, o niezależnych i stacjonarnych przyrostach nie jest równoważny uogólnieniu tradycyjnych równań Langevina na przypadek szumu Lévy. W pracy [A1] przeanalizowano szczególną klasę procesów losowych powodowanych przez symetryczny szum Lévy, asymptotycznie dążących do równowagi Boltzmanna, o gęstości prawdopodobieństwa (pdf) $\rho_*(x) \sim \exp(-\Phi(x))$, gdzie $\Phi(x)$ jest pewną funkcją (potencjałem). Tego typu zachowanie kontrastuje ze standardowym, langevinowskim opisem procesów skokowych typu Lévy. Wiadomo, że wybór funkcji dryfu w równaniu Langevina w postaci newtonowskiej $-\nabla\Phi$ wyklucza istnienie pdf typu Boltzmannowskiego [47]. Wszędzie tam gdzie spodziewamy się istnienia równowagi termodynamicznej i gdzie należało by oczekiwać asymptotyki boltzmannowskiej uogólnienie równań Fokkera-Plancka na przypadek równań ułamkowych wydaje się właściwym podejściem. Wiedząc o niekompatybilności pomiędzy asymptotyką boltzmannowską, a tradycyjnym ujęciem langevinowskim dynamiki podjęto próbę mikroskopowego opisu procesów nielangevinowskich w języku trajektorii. Umiejętność realizacji dowolnego procesu losowego, a w szczególności procesu z asymptotyką boltzmannowską jest kluczowa w zagadnieniach inżynierskich, matematycznego modelowania czy problemach przeszukiwania, dlatego w [A1] podjęto próbę generowania trajektorii ułamkowego procesu Lévy zadanego równaniem mistrzowskim. Ponadto, każda taka trajektoria może być potencjalną realizacją eksperymentu fizycznego. Z drugiej strony, mając procedurę generowania trajektorii można, przeprowadzając "eksperyment" numeryczny wiele razy, wyznaczyć statystykę trajektorii, przy pomocy której rozwiążemy dane zagadnienie. W tym przypadku, ewolucję gęstości prawdopodobieństwa zadajemy w tradycyjnej i często pojawiającej się w wielu miejscach w fizyce postaci równania mistrzowskiego (master equation), z wbudowaną weń równowagą szczegółową [26]

$$\partial_t \rho(x) = \int\limits_{\varepsilon_1 \leqslant |x-y| \leqslant \varepsilon_2} [w_\phi(x|y)\rho(y) - w_\phi(y|x)\rho(x)]dy, \tag{3}$$

gdzie dla dowolnego $\alpha \in (0,2)$ szybkość prawdopodobieństwa przejścia z punktu y do x ma postać

$$w_\phi(x|y) = C_\alpha \frac{\exp[(\Phi(y) - \Phi(x))/2]}{|x-y|^{1+\alpha}}, \qquad C_\alpha = \frac{\Gamma(1+\alpha)\sin(\pi\alpha/2)}{\pi}. \tag{4}$$

Oczywiście rozwiązaniem równania (3) jest funkcja $\rho_*(x) \sim \exp(-\Phi(x))$. Funkcja $\Phi(x)$ może być w zasadzie dowolną funkcją, wybraną arbitralnie, taką by całka z $\rho_*(x)$ była zbieżna. W przeciwieństwie do procedur generowania trajektorii bazujących na langevinowskim opisie procesów Lévy w zewnętrznym polu, do momentu powstania [A1] nie była znana w literaturze żadna metoda generowania trajektorii ułamkowego uogólnionego równania Fokkera-Plancka (3). Praca [A1] wypełniła tę lukę. Algorytm generowania trajektorii powstał na podstawie modyfikacji znanego algorytmu Gillespie, dotyczącego kinetyki reakcji chemicznych [48, 49], w którym to uogólniono zagadnienie dyskretne (skończoną liczbę kanałów) na przypadek ciągły. Idea algorytmu jest następująca

(i) Ustaw czas $t = 0$ i punkt początkowy $x = x_0$.

(ii) Stwórz zbiór wszystkich możliwych przejść z punktu x_0 do $x_0 + z$, zgodnie z szybkością prawdopodobieństwa przejścia $w_\phi(z + x_0|x_0)$.

(iii) Oblicz

$$W_1(x_0) = \int_{-\varepsilon_2}^{-\varepsilon_1} w_\phi(z + x_0|x_0)dz, \quad W_2(x_0) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} w_\phi(z + x_0|x_0)dz, \tag{5}$$

oraz $W(x_0) = W_1(x_0) + W_2(x_0)$.

(iv) Wygeneruj liczbę p z rozkładu jednostajnego na $[0, 1]$.

(v) Znajdź b odpowiadające przejściu z $x_0 \to b$ na podstawie

$$\begin{cases} \int\limits_{-\varepsilon_2}^{b} w_\phi(z + x_0|x_0)dz = p\,W(x_0), & p < W_1(x_0)/W(x_0); \\ W_1(x_0) + \int\limits_{\varepsilon_1}^{b} w_\phi(z + x_0|x_0)dz = p\,W(x_0), & p \geqslant W_1(x_0)/W(x_0). \end{cases} \tag{6}$$

(vi) Wygeneruj liczbę q z rozkładu jednostajnego na $(0, 1)$.

(vii) Zaktualizuj czas t na $t + \Delta t$, gdzie $\Delta t = -\ln q/W(x_0)$.

(viii) Zaktualizuj x_0 na $x_0 + b$.

(ix) Powróć do kroku (ii) lub zakończ.

Powyższy algorytm należało przetestować. Ponieważ opisana powyżej procedura zależy od wyboru potencjału Φ, lub co jest równoważne ρ_* do testów wybrano asymptotyczny stan gaussowski dla kilku $\alpha \in (0,2)$, tj. dla $\alpha = 0.5, 1, 1.5$. Po pierwsze należało zweryfikować, czy wygenerowane trajektorie mają jakościowe cechy trajektorii procesów skokowych. Po drugie należało sprawdzić, w jaki sposób kształt trajektorii zależy od parametru α. Należało oczekiwać, że im parametr α mniejszy tym częstość "długich" skoków większa. Okazało się, że powyższy algorytm spełnia stawiane mu warunki. Ustawiając markery w wybranych chwilach czasu t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, możliwe było zebranie informacji o konfiguracji przestrzennej dowolnej trajektorii w chwilach t_k. Generując kolejne trajektorie, wykonano statystykę rozkładu położenia w chwilach t_k. Z zasad konstrukcji algorytmu, uprawnionym było oczekiwanie, że statystyka wygenerowanych trajektorii będzie przybliżać prawdziwą pdf $\rho(x,t)$. Pojawiające się w tym miejscu pytanie czy na pewno metoda statystyk przybliża poprawnie rozkład $\rho(x,t)$ odłożono na później (patrz [A3]). W [A1] sprawdzono jedynie czy dla dostatecznie długich czasów statystyka wygenerowanych trajektorii nie będzie znacząco różnić się od rozkładu ρ_* oraz czy wraz ze wzrostem liczby trajektorii, charakterystyki procesu (np. drugi moment, empiryczna dystrybuanta, itp.) stają się krzywymi gładkimi, dążącymi do odpowiednich charakterystyk stanu asymptotycznego. Mając na uwadze temat rozprawy, można stwierdzić, że w [A1] możliwe było rozwiązanie równania (3) w polu potencjału Φ metodami statystycznymi oraz porównanie statystyki trajektorii procesu ultrarelatywistycznego ($\alpha = 1$) z innymi procesami α-stabilnymi dla $\alpha = 0.5$ i $\alpha = 1.5$. Jak należało oczekiwać, im mniejsze α, tym szybkość osiągania stanu równowagowego wolniejsza (częste, długie skoki przeszkadzają w termicznej stabilizacji). Szczegółowa analiza statystyk trajektorii dla kilku potencjałów wiążących $\Phi(x)$, tj. potencjału harmonicznego, rodziny potencjałów logarytmicznych $n\ln(1+x^2)$, dla $n = 1, 2$ i lokalnie periodycznego potencjału $\sin^2(2\pi x)$, dla $|x| \leqslant 2$ i $x^2 - 4$ dla $x > 2$ została efektywnie przeprowadzona, a otrzymane wyniki potwierdziły skuteczność użytego algorytmu. Opisana powyżej metoda jest punktem wyjścia do analizy stanów związanych (stacjonarnych, równowagowych) nielangevinowskich procesów Lévy. Po raz pierwszy udało się przygotować procedurę numerycznego generowania trajektorii procesu Lévy z boltzmannowską asymptotyką opisywanych równaniem mistrzowskim (3).

Praca [A2] stanowi uogólnienie pracy [A1] na przypadek dwuwymiarowy. Ponieważ w $\mathbb{R}^2$ nie ma naturalnie zdefiniowanego liniowego porządku więc prosta modyfikacja algorytmu nie jest możliwa, ze względu na układ (6) w kroku (v) algorytmu. Możliwe są natomiast osobne "przejścia" w obu kierunkach (pionowym i poziomym). Dla dowolnej pary $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ definiujemy zbiór

$$A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ \varepsilon_1^x \leqslant |x-u| \leqslant \varepsilon_2^x \wedge \varepsilon_1^y \leqslant |y-v| \leqslant \varepsilon_2^y\}. \tag{7}$$

Dwuwymiarowe równanie mistrzowskie, zapisujemy w postaci

$$\partial_t \rho(x,y) = \iint_A [w_\phi(x,y|u,v)\rho(u,v) - w_\phi(u,v|x,y)\rho(x,y)]\nu_\alpha(du,dv), \tag{8}$$

gdzie miara Lévy w 2D dla $\alpha \in (0,2)$ zadana jest przez

$$\nu_\alpha(du,dv) = C_\alpha \frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^{(2+\alpha)/2}}, \qquad C_\alpha = \frac{2^\alpha \Gamma((2+\alpha)/2)}{\pi|\Gamma(-\alpha/2)|}, \tag{9}$$

a szybkość prawdopodobieństwa przejścia z punktu (u,v) do (x,y)

$$w_\phi(x,y|u,v) = \exp\left[\frac{\Phi(u,v) - \Phi(x,y)}{2}\right]. \tag{10}$$

Oznaczając $W_\phi^\alpha(x_0,y_0,\xi,\eta,d\xi,d\eta) = w_\phi(\xi+x_0,\eta+y_0|x_0,y_0)\nu_\alpha(d\xi,d\eta)$, punkty ((iii)-(v)) algorytmu procesu w jednym wymiarze zastępujemy poniższymi

(iii) Oblicz

$$
\begin{aligned}
W_1(x_0,y_0) &= \int\limits_{-\varepsilon_2^x}^{-\varepsilon_1^x}\int\limits_{-\varepsilon_2^y}^{-\varepsilon_1^y} W_\phi^\alpha(x_0,y_0,\xi,\eta,d\xi,d\eta), \quad W_2(x_0,y_0) = \int\limits_{-\varepsilon_2^x}^{-\varepsilon_1^x}\int\limits_{\varepsilon_1^y}^{\varepsilon_2^y} W_\phi^\alpha(x_0,y_0,\xi,\eta,d\xi,d\eta),\\
W_3(x_0,y_0) &= \int\limits_{\varepsilon_1^x}^{\varepsilon_2^x}\int\limits_{-\varepsilon_2^y}^{-\varepsilon_1^y} W_\phi^\alpha(x_0,y_0,\xi,\eta,d\xi,d\eta), \quad W_4(x_0,y_0) = \int\limits_{\varepsilon_1^x}^{\varepsilon_2^x}\int\limits_{\varepsilon_1^y}^{\varepsilon_2^y} W_\phi^\alpha(x_0,y_0,\xi,\eta,d\xi,d\eta),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

oraz $W(x_0,y_0) = W_1(x_0,y_0) + W_2(x_0,y_0) + W_3(x_0,y_0) + W_4(x_0,y_0)$.

(iv) Wygeneruj liczby p_x i p_y z rozkładu jednostajnego na $[0,1]$.

(v) Znajdź b_x i b_y z zależności

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-\varepsilon_2^x}^{b_x}\left(\int\limits_{-\varepsilon_2^y}^{-\varepsilon_1^y}+\int\limits_{\varepsilon_1^y}^{\varepsilon_2^y}\right) W_\phi^\alpha(x_0,y_0,\xi,\eta,d\xi,d\eta) &= p_x W(x_0,y_0), \quad p_x < W_{12}(x_0,y_0)/W(x_0,y_0),\\
W_{12}(x_0,y_0) + \int\limits_{\varepsilon_1^x}^{b_x}\left(\int\limits_{-\varepsilon_2^y}^{-\varepsilon_1^y}+\int\limits_{\varepsilon_1^y}^{\varepsilon_2^y}\right) W_\phi^\alpha(x_0,y_0,\xi,\eta,d\xi,d\eta) &= p_x W(x_0,y_0), \quad p_x \geqslant W_{12}(x_0,y_0)/W(x_0,y_0),\\
\int\limits_{-\varepsilon_2^y}^{b_y}\left(\int\limits_{-\varepsilon_2^x}^{-\varepsilon_1^x}+\int\limits_{\varepsilon_1^x}^{\varepsilon_2^x}\right) W_\phi^\alpha(x_0,y_0,\xi,\eta,d\xi,d\eta) &= p_y W(x_0,y_0), \quad p_y < W_{13}(x_0,y_0)/W(x_0,y_0),\\
W_{13}(x_0,y_0) + \int\limits_{\varepsilon_1^y}^{b_y}\left(\int\limits_{-\varepsilon_2^x}^{-\varepsilon_1^x}+\int\limits_{\varepsilon_1^x}^{\varepsilon_2^x}\right) W_\phi^\alpha(x_0,y_0,\xi,\eta,d\xi,d\eta) &= p_y W(x_0,y_0), \quad p_y \geqslant W_{13}(x_0,y_0)/W(x_0,y_0),
\end{aligned}
$$

gdzie $W_{ij}(x_0,y_0) = W_i(x_0,y_0) + W_j(x_0,y_0)$.

W zasadzie cała istota uogólnienia leży w kroku (v) algorytmu. Tak zmodyfikowany algorytm pozwala na generowanie trajektorii dla dowolnie wybranego potencjału Φ (byle $\exp(-\Phi) \in L^1(\mathbb{R}^2)$). Prezentowany powyżej sposób generowania trajektorii wymaga całkowania numerycznego w 2D, a szybkość wyznaczania pojedynczej trajektorii maleje kilkukrotnie w stosunku do przypadku jednowymiarowego. Możliwość równoległego przeprowadzania obliczeń numerycznych na klastrach komputerowych pozwala w rozsądnym czasie na generowanie dowolnie dużej liczby trajektorii czyniąc tym samym opisany powyżej algorytm skutecznym. Ponadto, widać w tym miejscu przepis na uogólnienie algorytm na przypadek większej ilości wymiarów. Jednocześnie należy podkreślić, że zwiększenie liczby wymiarów znacząco wydłuża czas wykonywania obliczeń numerycznych. W pracy [A2] szczegółowo przeanalizowano statystykę trajektorii (przybliżającą $\rho(x,y,t)$) dla kilku wybranych potencjałów: dwuwymiarowy potencjał harmoniczny, potencjał logarytmiczny odpowiadający dwuwymiarowemu stanowi Cauchy i potencjał lokalnie periodyczny. Wszystkie rozważane przypadki potencjałów wiążących dotyczyły procesów ultrarelatywistycznych tj. procesów z $\alpha = 1$, choć gotowy algorytm pozwalał także na badanie statystyk trajektorii dla dowolnego $\alpha \in (0,2)$.

Podsumowując, w [A2] przyjęto a priori rozkład prawdopodobieństwa ρ_* w postaci boltzmannowskiej $\exp(-\Phi)$, a następnie dobrano do niej odpowiedni szum Lévy. Modyfikacja użytecznego algorytmu Gillespie [48, 49] oryginalnie sformułowanego dla problemów kinetyki reakcji chemicznych umożliwiła rekonstrukcję trajektorii losowych procesu stochastycznego. Statystyczna analiza wygenerowanych trajektorii dała możliwość wydedukowania substytutu pdf, ewoluującego zgodnie z równaniem mistrzowskim i osiągającym cel ρ_*.

W pracy [A3] dokonano porównania przybliżania $\rho(x,t)$ otrzymanego na podstawie analizy statystycznej trajektorii nielangevinowskich procesów przedstawionej w [A1] z ewolucją kinetyczną wyznaczoną na podstawie równania różnicowego (porównaj z (3))

$$\rho(x,t+\Delta t) \approx \rho(x,t) + \Delta t \int\limits_{\varepsilon_1 \leqslant |z| \leqslant \varepsilon_2} [w_\phi(x|x+z)\rho(x+z,t) - w_\phi(x+z|x)\rho(x,t)]dz, \quad (12)$$

dla dostatecznie małego Δt. Oczywiście im mniejszy parametr różnicowy Δt, tym przybliżenie (12) lepiej oddaje ewolucję zadaną równaniem mistrzowskim (3), powodując jednocześnie wydłużenie procedury numerycznej. Z drugiej strony Δt nie może być zbyt duże. Należy upewnić się, że wielkość po prawej stronie (12) nie jest ujemna w każdym kroku ewolucji. Stałą Δt wyznaczono z należytą starannością, empirycznie. Zakładamy, że dla odpowiednio dobranego Δt ewolucja zadana (12) przybliża "prawdziwą" ewolucję na przedziale $[0,T]$, dla dowolnego $T \in \mathbb{R}$. Celem pracy [A3] było okazanie, że dla dowolnego $t \in [0,T]$ pdf $\rho(x,t)$ otrzymane na podstawie równania różnicowego (12) nie różni się znacząco od rozwiązania równania mistrzowskiego (3) metodami statystycznymi. Metoda statystyczna zaprezentowana w [A1] mogła być skonfrontowana już nie tylko dla $t \to \infty$ ale także dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. W tym celu wystarczyło porównać wyniki statystyki trajektorii z rozwiązaniami otrzymanymi na podstawie (12) dla dowolnego t. Dotychczas nie było jasne czy obie metody dają te same wyniki, a tym samym nie było jasne czy metoda statystyczna sformułowana w [A1, A2] daje poprawne wyniki dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Praca [A3] usuwa tę lukę. Porównanie obu rodzajów przybliżeń dla kilku wybranych potencjałów Φ, harmonicznego, logarytmicznych i lokalnie periodycznego, skutecznie przeprowadzono i szczegółowo przedyskutowano. W [A3] dokonano kompleksowego porównania obu metod, uwzględniając rozmaity wybór parametrów numerycznych (np. stałej obcięcia dziedziny a w procedurze numerycznej, parametrów ε_1 i ε_2). Otrzymane rozkłady gęstości prawdopodobieństwa dla kilku wybranych czasów t_k dowodzą, że obie metody są zadowalająco zgodne. Wszędzie tam gdzie to tylko możliwe zbadano charakterystyki rozkładów w czasie (drugi moment, empiryczna dystrybuanta, itp.). Pokazano, że zbieżność obu metod jest tym lepsza im liczba trajektorii brana do statystyki zgodnie z [A1] jest większa.

Podsumowując, głównym celem prezentowanych w tym rozdziale prac było znalezienie efektywnej metody symulacji ruchu na poziomie mikroskopowym. Konieczne okazało się sformułowanie nowego podejścia do problemu, w którym techniki analityczne są nieskuteczne, bądź w ogóle pozostają poza zasięgiem. Konieczne jest wiec wspomaganie numeryczne dla otrzymania nie tylko wyników jakościowych ale też ilościowych (mikroskopowo oraz w sensie lokalnych średnich).

II. Wyznaczanie stanów związanych operatorów nielokalnych metodą Stranga [A4, A5]

W tym rozdziale prezentujemy metodę rozwiązywania zagadnień spektralnych operatorów nielokalnych. Pełnoprawne kwantowe teorie indukowane nielokalnie zostały starannie przeanalizowane w [7]. Zauważono, ze ogólnym scenariuszem dynamiki, wynikającym z równania Schrödingera może być ten, w którym tradycyjnie zadany operator Laplace'a zastąpiono nielokalnym (pseudo-różniczkowym) operatorem. Z wyjątkiem tzw. relatywistycznych Hamiltonianów (porównaj bezspinowe równanie Salpetera z lokalnym potencjałem lub bez niego [7, 50, 60]) nielokalne generatory energii nie mają wsparcia w klasyczno-mechanicznej intuicji cząstek masywnych w ruchu. Dlatego też ułamkowe generatory wydają się mieć więcej wspólnego z polami niż z cząstkami, niezależnie od ich klasycznych czy kwantowych konotacji.

Praca [A4] poświęcona jest zagadnieniom spektralnym nielokalnego operatora $H =$

$T+V$, gdzie T jest operatorem ultrarelatywistycznym, V jest lokalnie więżącym potencjałem. Istnieje wiele rozmaitych metod rozwiązywania tego typu zagadnień. W [A4] użyto metod półgrupowych. Unitarna ewolucja kwantowa $\exp(-itH/\hbar)$ i ewolucja półgrupowa Schrödingera $\exp(-tH/\hbar)$ są przykładami dualnej ewolucji. Przejście z jednej do drugiej jest możliwe dzięki przedłużeniu analitycznym w czasie, tutaj $it \to t$, dla $t \geqslant 0$. Jeśli analityczne rozwiązania nie są możliwe do osiągnięcia dla "tradycyjnych" (lokalnych) hamiltonianów ucieczka do technik urojonego czasu jest rutynową procedurą [51, 53–56], zobacz też [57].

Jedynie dla nielicznych nielokalnych zagadnień spektralnych znane są rozwiązane analitycznie. Jednym z nich jest zagadnienie nielokalnego oscylatora harmonicznego [26, 27]. Wśród pojawiających się rozwiązań istnieją też takie, jak np. zagadnienie nielokalne nieskończonej studni potencjału [8–12], które są w ewidentnej sprzeczności z pracami [30–34]. Głównym celem pracy [A4] było rozwianie pojawiających się wątpliwości innymi, niż te opisane już w literaturze, metodami.
Operator

$$T\psi(x) = (-\Delta)^{1/2}\psi(x) = \frac{1}{\pi}(p.v.)\int \frac{\psi(x)-\psi(x+z)}{z^2}dz, \tag{13}$$

nazywamy nielokalnym, ultrarelatywistycznym (Cauchy) operatorem na prostej z dziedziną L^p, $p \in [1,\infty)$ (przestrzeń Lebesgue) lub $\mathcal{C}_0$ (przestrzenią funkcji ciągłych znikających w nieskończonościach) lub $\mathcal{C}_{bu}$ (przestrzenią funkcji ograniczonych, jednostajnie ciągłych). Inne równoważne definicje operatora Cauchy można znaleźć w [52]. Powyższą całkę rozumiemy w sensie wartości głównej Cauchy

$$(p.v.)\int f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} f(z)dz. \tag{14}$$

Dyskretyzując oś czasu $t_n = nh$, ($n \in \mathbb{N}$, $h - const$), możemy dla małej wartości parametru czasowego h, ewolucję $\exp(-hH)$, gdzie $H = T+V$, T jest operatorem (13) a V jest potencjałem wiążącym, przybliżyć znanym dla operatorów lokalnych przybliżeniem Stranga [53], będącym odpowiednikiem rozkładu Trottera

$$\exp(-hH) \approx \exp(-hV/2)\exp(-hT)\exp(-hV/2) \approx \exp(-hV/2)(1-hT)\exp(-hV/2) \equiv S(h). \tag{15}$$

Mały parametr h oznacza w tym kontekście mały w stosunku do $||H\Psi||$, gdzie Ψ funkcją przybliżającą rozwiązanie własne. Działanie sukcesywne operatorem $S(h)$, tj. $(S(h))^n$, dla $h \ll 1$ na funkcję próbną $\psi(0)$ przybliża ewolucję $\psi(t) = \exp(-tH)\psi(0)$, gdy $t = nh$, $n \in \mathbb{N}$. Dzięki dekompozycji (15) i powyższej uwagi, możliwe było przygotowanie procedury numerycznej, przybliżającej rzeczywistą ewolucję, która dla n funkcji próbnych daje się zapisać w postaci

(i) Wybrać $t = 0$ i skończoną liczbę n funkcji $\{\Phi_i^{(0)}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$, (najlepiej liniowo niezależnych, n jest skorelowane z liczbą szukanych funkcji własnych).

(ii) Wyznaczyć $\Psi_i^{(1)}(x) = S(h)\Phi_i^{(0)}(x)$, dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$.

(iii) Zortonormalizować zbiór funkcji $\{\Psi_i^{(1)}\}$ otrzymując nowy zbiór funkcji $\{\Phi_i^{(1)}\}$ (np. metodą Grama-Schmidta).

(iv) Powtarzać kroki ((ii)-(iii)) otrzymując czasowo uporządkowany ciąg $\{\Phi_i^{(k)}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ i zbiór liniowo niezależny

$$\Psi_i^{(k+1)}(x) = S(h)\Phi_i^{(k)}(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{16}$$

w czasie $t_{k+1} = (k+1)h$. Przerwać procedurę w przypadku pojawienia się zbieżności, patrz też [56].

(v) Oczekiwać, że czasowo uporządkowany ciąg $\Phi_i^{(k)}$, dla odpowiednio dużego k jest ciągiem funkcji własnych $S(h)$ zgodnie z

$$S(h)\Phi_i^{(k)}(x) = e^{-hE_i^{(k)}}\Phi_i^{(k)}(x) \sim e^{-hE_i}\psi_i(x), \tag{17}$$

gdzie ψ_i jest funkcją własną operatora H odpowiadającą wartości własnej E_i. Tutaj

$$E_i^{(k)}(h) = -\frac{1}{h}\ln(\mathcal{E}_i^k(h)), \tag{18}$$

gdzie

$$\mathcal{E}_i^k(h) =< \Phi_i^{(k)}|\Psi_i^{(k+1)} >=< \Phi_i^{(k)}|S(h)\Phi_i^{(k)} > . \tag{19}$$

Nikt wcześniej nie stosował metod opisanych powyżej do rozwiązywania zagadnień spektralnych dla operatorów nielokalnych. Zastosowanie powyższej procedury numerycznej dla znanych analitycznie rozwiązań dla potencjału harmonicznego [26, 27] pozwoliło przetestować zasadność użytych uproszczeń numerycznych (np. zależności wartości własnych od numerycznego parametru obcięcia dziedziny funkcji). W [A4] szczegółowo wyznaczono i przeanalizowano pięć pierwszych funkcji i wartości własnych operatora Cauchy z potencjałem harmonicznym. Algorytm okazał się niezwykle skuteczny dla potencjału harmonicznego, pozwalając jednocześnie na badanie innych lokalnych potencjałów V. Opisana powyżej metoda numeryczna dawała zielone światło badaniom innych zagadnień własnych operatora Cauchy, np. zagadnienia własnego z potencjałem skończonej studni o głębokości V_0. Dla potencjału skończonej studni wyznaczono kilka początkowych funkcji własnych w zależności od głębokości V_0. Interesująca wydawała się możliwość zwiększania głębokości studni, pozwalająca na przybliżanie wartości spektralnych dla nieskończonej studni. Wraz ze wzrostem głębokości V_0 studni, wartości i funkcje własne powinny dążyć do wartości i funkcji własnych nieskończonej studni potencjału. W pracy [A4] pokazano, że dla bardzo głębokich studni wyniki [8–12] nie mogą być poprawne. Potwierdzono jednocześnie, że przybliżenia wartości własnych otrzymane dla głębokiej studni są bliskie wartościom wyznaczonym innymi metodami [34]. Jednoczenie dowiedziono, że przybliżenia [34] są niedostateczne dla początkowych rozwiązań własnych. Otrzymane w [A4] kształty funkcji własnych zdecydowanie poprawiają znane do tej pory przybliżone wyniki [34]. Wykazano także, że otrzymane numerycznie funkcje własne spełniają wszystkie znane do tej pory w literaturze warunki, a na granicy zbioru $[-1, 1]$ zachowują się jak $(1 - |x|)^{1/2}$, zgodnie z [58]. Wyznaczone algorytmem wartości własne dla głębokich studni ($V_0 = 500, 5000$) okazały się być zaskakująco zgodne z wynikami [34].

Praca [A5] rozszerza badania zapoczątkowane pracą [A4] na klasę procesów quasirelatywistycznych. Głównym celem pracy [A5] było rozwinięcie metod stosowanych w [A4] na przypadek operatorów quasirelatywistycznych postaci $H = T_m + V$, gdzie T_m jest nielokalnym operatorem $\sqrt{-\hbar^2c^2\Delta + m^2c^4} - mc^2$, $m \in (0, \infty)$, a V jest lokalnym potencjałem więżącym. Operator T_m jest dobrze znanym w literaturze operatorem, który dla m dążącym do zera przyjmuje postać operatora Cauchy T_0. Operator T_m działający na zbiorze odpowiednich funkcjach przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$ ma całkową reprezentację postaci

$$T_m\psi(x) = (p.v.)\int[\psi(x) - \psi(x+z)]\nu_m(dz). \tag{20}$$

Powyższą całkę rozumiemy w sensie wartości głównej Cauchy. Miara Lévy $\nu_m(dz)$ definiująca proces ultrarelatywistyczny zadana jest

$$\nu_m(dz) = \frac{m}{\pi}\frac{K_1(m|z|)}{|z|}dz, \tag{21}$$

gdzie K_1 jest zmodyfikowaną funkcją Bessela trzeciego rodzaju. Oczywiście dla małych argumentów, $K_1(m|z|) \sim (m|z|)^{-1}$, co daje $\nu_{m\to 0}(dz) \to dz/(\pi z^2)$ miarę procesu Cauchy.

W [A5] ograniczono badania do lokalnych potencjałów V: harmonicznego i skończonej studni o głębokości V_0. Dla takich potencjałów V, operator $H = T_m + V$ jest nieujemnym operatorem samosprzężonym, którego widmo jest częściowo dyskretne i niezdegenerowane. Podobnie jak to uczyniono w [A4], także w [A5] zastosowano sztuczkę z "czasem urojonym", tj. użyto opisu półgrupowego $\exp(-tH)$. Praca [A5] w kontekście tematu rozprawy ma zasadnicze znaczenie, bowiem rzuca szersze światło na procesy ultrarelatywistyczne. Proces Cauchy to oczywiście graniczny proces quasirelatywistyczny, gdy $m \to 0$, niemniej jednak jak pokazano w [A5] pewne cechy procesów ultrarelatywistycznych posiadają także procesy z niezerowym (małym) parametrem masowym m. Innymi słowy, dzięki pracy [A5] można bazować na rozwiązaniach dla operatora Cauchy, także dla Hamiltonianów z małym parametrem masowym. Co oznacza w tym kontekście zwrot "mały parametr" wyjaśniono w Appendixie [A5]. Podobnie jak to zrobiono w [A4] ewolucję półgrupową Schrödingera, przybliżamy w sekwencji krótko-czasowych przedziałów metodą Stranga i stosujemy opisany na początku tego rozdziału algorytm zamieniając jedynie miarę Lévy.

Według naszej wiedzy, nie istnieje w literaturze żadna praca, kompleksowo zgłębiająca zagadnienie quasirelatywistycznego oscylatora harmonicznego czy skończonej studni w wymiarach 1D i 2D. Pewne wyniki w przestrzeni 3D można znaleźć w [35, 59, 60]. Metodami numerycznymi opisanymi powyżej można otrzymać rozwiązania spektralne dla dowolnego $m \in [0, \infty)$ ale pewne kompleksowe własności (wspólne cechy) mają operatory dla których $m \ll 1$ oraz $m \gg 1$. Zajmijmy się najpierw omówieniem wyników dla quasirelatywistycznego oscylatora harmonicznego, dzieląc jak już wspomniano, rozważania na dwie klasy $m \ll 1$ i $m \gg 1$. I tak dla $m \ll 1$, jak pokazano w [A5] funkcje własne (pierwsze pięć) nawet dla $m = 0.001, 0.01, 0.1$ niewiele różnią się od wyników oscylatora Cauchy. Niewielkie różnice, rzędu kilku procent widać na poziomie wartości własnych. Im większe m ($m \ll 1$) tym odpowiadająca jej wartość własna coraz bardziej odbiega (zmniejsza się) od wartości własnej oscylatora Cauchy. Z drugiej zaś strony wpływ nielokalności zmniejsza się wraz ze wzrostem parametru m (widać to chociażby po minimalnych zmianach wartości własnej od parametru obcięcia dziedziny, który jest pewną miarą nielokalności; porównaj z prawą stroną wykresu Fig.4 [A5]). Dla $m \gg 1$ wartości własne dążą do odpowiednich wartości własnych kwantowego oscylatora harmonicznego o hamiltonianie $-\Delta/(2m) + x^2$. Wartości własne odpowiadające kolejnym funkcjom własnym są proporcjonalne do liczby kwantowej n i odwrotnie proporcjonalne do pierwiastka z m. Widać w tym miejscu, że oczekiwania jakie należało by postawić zaproponowanej metodzie numerycznej są znakomicie realizowane i dają wyniki zgodne z przypuszczeniami.

Klasę rozwiązań dla potencjału skończonej studni podzielono także na obszary z $m \ll 1$ oraz $m \gg 1$. W przypadku studni mamy dodatkowy parametr, głębokość V_0 studni, od którego dodatkowo zależą funkcje i wartości własne. Jak pokazano w [A5] zarówno dla płytkich studni ($V_0 = 5$) jak i studni głębokich ($V_0 = 500$), gdy m jest małe to rozwiązania równania własnego dążą do rozwiązań operatora Cauchy w skończonej studni, natomiast dla dużych m dążą do rozwiązań własnych z tradycyjnym hamiltonianem kwantowym. Wykazano, że dla głębokich studni (już od $V_0 \geqslant 500$) wraz ze wzrostem parametru m kolejne wartości własne zmieniają się jak n^2, tzn. $E_n \sim n^2$ (tak jak w zagadnieniu własnym cząstki kwantowej w nieskończonej, prostokątnej studni). W tym przypadku także funkcje własne dążą do odpowiednich funkcji trygonometrycznych (znanych z tradycyjnych kursów mechaniki kwantowej).

Przy okazji warto wspomnieć, że dla operatorów nielokalnych istnieje cała gama problemów otwartych. Warto w tym miejscu podać choćby kilka. Czy prawdziwe jest twierdzenie nodalne (tj. czy kolejna funkcja własna ma dokładnie jeden pierwiastek więcej od poprzedniej) udowodnione dla zwykłego Laplasjanu? Ile rozwiązań istnieje w skończonej studni o danej głębokości V_0 i jak liczba rozwiązań zależy od V_0? W [A5] co prawda nie odpowiedziano na postawione pytania bezpośrednio ale zbadano ilość rozwiązań dla płytkich studni w zależności od m. Jeśli parametr m jest wystarczająco duży to liczba rozwiązań równania własnego dla quasirelatywistycznej studni jest identyczna z liczbą rozwiązań tradycyjnej kwantowej studni. Różnice w ilości rozwiązań pojawiają się dla małych wartości parametru m (dla studni quasirelatywistycznej tych rozwiązań jest więcej). Otwartym pozostaje pytanie, jak liczba rozwiązań funkcji związanych zależy od m i od głębokości studni V_0, choć powyższy algorytm numeryczny pozwala dać odpowiedź dla dowolnego m i V_0.

Metody rozwiązywania zagadnień spektralnych przedstawione w tym rozdziale można z powodzeniem zastosować zarówno dla innych operatorów nielokalnych jak również dla innych potencjałów V. Zaletą rozwiniętej metody jest to, że nie wymaga przejścia do przestrzeni pędów, jak to się zwyczajowo robi dla operatorów lokalnych, a tym samym pozwalającą na lepszą kontrolę parametrów w procedurze numerycznej.

III. Problem pułapkowania procesów nielokalnych [A6]

W przeciwieństwie do lokalnie zdefiniowanego operatora Laplace'a $\Delta = \partial^2/\partial x^2$ standardowego ruchu Browna na prostej $\mathbb{R}$, generatory stabilnych procesów Lévy są przestrzennie nielokalne. Rozwiązania tradycyjnie zabijanego procesu Browna na $D = (a, b) \subset \mathbb{R}$, (zagadnienie Dirichleta), $\partial_t \rho(x, t) = \Delta\rho(x, t)$ można z powodzeniem rozszerzyć na całe $\mathbb{R}$, kładąc $\rho(x, t) = 0$ na $\mathbb{R}\backslash D$. Standardowo zabijany proces Cauchy na D nie daje się rozszerzyć na całą prostą. Jeśli $\rho_n(x, t)$ są funkcjami własnymi infinitezymalnego generatora zabijanego procesu Cauchy na D, to rozszerzenie $\rho_n(x, t) = 0$ dla $\mathbb{R}\backslash D$ nie należy do dziedziny $L^2(\mathbb{R})$ generatora, zdefiniowanego już poprzednio wzorem (13), patrz też [30, 61]. W pracy [A6] szczegółowo analizowano problem lokalizowania procesu Cauchy na D.

Istota metody leży w przejściu od równania Fokkera-Plancka

$$\partial_t \rho = \Delta\rho - \nabla(b\rho), \tag{22}$$

na $\rho(x, t)$ z gęstością początkową $\rho_0(x) = \rho(x, 0)$ i więzami do równania Schrödingera

$$\partial_t \Psi = -H\Psi = \Delta\Psi - \mathcal{V}\Psi, \tag{23}$$

Zakładamy, że potencjał $\mathcal{V}$ jest taki, że istnieje stacjonarna (równowagowa) funkcja dodatnia $\Psi(x) = \rho_*^{1/2}(x)$, odpowiadająca zerowej wartości własnej operatora H. Warunek ten może być zawsze osiągnięty poprzez odjęcie niezerowej wartości własnej, jeśli oczywiście potencjał jest odpowiedni, zobacz np. [44].
Zgodnie z równaniem (23) pomocniczy potencjał przyjmuje postać

$$\mathcal{V}(x) = \rho_*^{-1/2}(x)\Delta\rho_*^{1/2}(x), \tag{24}$$

Przejście między (22) a (23) jest możliwe dzięki podstawieniu (pamiętając, że $\rho(x, t)$ jest gęstością prawdopodobieństwa, całkowaną do jedynki)

$$\rho(x, t) = \Psi(x, t)\rho_*^{1/2}(x). \tag{25}$$

Przy okazji otrzymujemy inne wyrażenie potencjału Schrödingera, $\mathcal{V} = (b^2/2 + \nabla b)/2$, gdzie $b = \nabla \ln \rho_*$.
Rozwiązanie równania (23), podstawione do (25) daje natychmiast rozwiązanie równania Fokkera-Plancka $\rho(x, t)$. Zaletą przedstawienia (25) jest to, że mając rozwiązanie spektralne operatora H, możemy zbudować stowarzyszone półgrupowe (Feynman-Kac) jądro $k(t, x, y) = \exp(-tH)(x, y) = \sum_n \exp(-\lambda_n t)\psi_n(x)\psi_n(y)$, a następnie dzięki tzw. transformacji Dooba $k(t, x, y)\rho_*^{1/2}(x)/\rho_*^{1/2}(y)$ definiujemy jądro gęstości prawdopodobieństwa przejścia $p(t, x, y)$ procesu dyfuzji $\rho(x, t) = \int p(t, x, y)\rho(y, t)dy$, zobacz [62].

Równanie Fokkera-Planka (22) z rozwiązaniem stacjonarnym $\rho_*^{1/2}(x)$ przepisujemy w postaci równania mistrzowskiego

$$\partial_t \rho = \left[\rho_*^{1/2} \Delta \left(\rho_*^{-1/2} \cdot\right) - \rho_*^{-1/2} \left(\Delta \rho_*^{1/2}\right)\right] \rho, \tag{26}$$

z zadaną niejawnie informacją o ograniczeniu ruchu do skończonego odcinka.
W odróżnieniu od równania Fokkera-Plancka powyższe równanie (26) daje się z powodzeniem uogólnić na dowolny proces niegaussowski. Wystarczy w tym celu zastąpić operator Laplace'a Δ ułamkowym generatorem procesu α-stabilnego [26, 39]. Dla procesu Cauchy z generatorem T danym wzorem (13) mamy

$$\partial_t \rho = -\left[\rho_*^{1/2} T \left(\rho_*^{-1/2} \cdot\right) - \rho_*^{-1/2} \left(T \rho_*^{1/2}\right)\right] \rho, \tag{27}$$

W pracy [A6] jako test metody rozwiązano najpierw równania Schrödingera z potencjałem skończonej studni o głębokości V_0, a następnie użyto go do wyznaczania ewolucji na podstawie (26). Równanie (26) możemy zastąpić jego różnicową wersją, która nadaje się do symulacji numerycznych, otrzymując ewolucję gęstości prawdopodobieństwa w czasie. Metoda ta szczegółowo została opisana w pracy [A3]. Podobnie czynności możemy przeprowadzić dla operatora Cauchy. Wyznaczoną w [A4] przybliżoną funkcję podstawową dla skończonej studni Cauchy wykorzystano zgodnie z (27) do badania ewolucji pdf $\rho(x,t)$ w dowolnej chwili t. W [A6] szczegółowo porównano oba procesy dla studni o głębokościach $V_0 = 5$, $V_0 = 20$ i $V_0 = 500$.

IV. Stany związane ultrarelatywistycznego operatora z potencjałem nieskończonej studni [A7-A10]

Ułamkowe operatory są przestrzennie nielokalne. Ta cecha sprawia, że wyzwaniem staje się rozwiązywanie zagadnień spektralnych z zadanymi z góry warunkami brzegowymi Dirichleta. W pracy [A7] badano własności funkcji własnych (związanych) operatora ultrarelatywistycznego $(-\Delta)^{1/2}$ na odcinku $D = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Nawet dla tak, wydawało by się prostego, zagadnienia nie są znane analityczne rozwiązania zagadnienia własnego. Pojawiające się w literaturze "rozwiązania" [8–12] (o czym pisaliśmy już w rozdziale II), są całkowicie niepoprawne, choć ożywiona dyskusja na temat ich poprawności trwa do dziś. Znane są natomiast przybliżenia funkcji własnych [34], jak i ogólne własności (oszacowania) kształtu rozwiązań własnych [30, 33].

Operator Cauchy na D, działający na funkcje $\psi(x)$ z $C_0^\infty(D)$ określony jest następująco

$$A_D \psi = \frac{2}{\pi} \frac{\psi(x)}{1-x^2} + \frac{1}{\pi} (p.v.) \int_{-1}^{1} \frac{\psi(x) - \psi(y)}{(x-y)^2} dy. \tag{28}$$

Uwaga: wartość główna Cauchy w (28) nie jest w zerze lecz w x. W pracy [A7] zaproponowano funkcję

$$\psi_1(x) = C\sqrt{(1-x^2)\cos(\alpha x)}, \qquad \alpha = \frac{1443}{4096}\pi = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) - \frac{93\pi}{4096}, \tag{29}$$

gdzie C jest stała normująca równą $C = 0.921749$ oraz

$$\psi_2(x) = -C \sin(\beta x)\sqrt{(1-x^2)\cos(\beta x)}, \qquad \beta = \frac{1760}{4096}\pi = \left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) - \frac{\pi}{128}, \tag{30}$$

ze stałą normującą $C = 1.99693$, jako przybliżone (podstawowa i pierwsza wzbudzona) rozwiązanie zagadnienia własnego (28). Pokazano, że funkcje te są najdokładniejszymi (jak dotąd) przybliżeniami podstawowej i wzbudzonej funkcji własnej, lepszymi niż przybliżenia [34]. Ponadto, przybliżenia (29, 30) są dane zwięzłym wzorem funkcyjnym w przeciwieństwie do znanych przybliżeń [34]. Jednocześnie wyznaczono wartości własne jako funkcje współczynników funkcji własnych w rozwinięciu w szereg Taylora. W pracy [A7] szczegółowo przeanalizowano jakość przybliżeń analitycznych i porównano kształt rozwiązań ze znanymi i dostępnymi przybliżeniami. Niejako przy okazji, zajmując się działaniem operatora A_D na funkcje ψ_1 i ψ_2 zdefiniowane w (29) i (30), gdzie funkcje trygonometryczne rozwijano w szereg Taylora (czyli wyliczając $A_D(x^{2n}\sqrt{1-x^2})$ i $A_D(x^{2n+1}\sqrt{1-x^2})$) opracowano metodę rozwiązywania równań spektralnych na odcinku $(-1,1)$.

Wiadomo, że przestrzeń funkcji własnych ultrarelatywistycznego operatora na odcinku $D=(-1,1)$ jest sumą prostą podprzestrzeni rozpiętych przez funkcje parzyste i nieparzyste [30]. Wiedza ta wraz ze stwierdzeniem z poprzedniego akapitu pozwoliła przygotować metodę przybliżania rozwiązań własnych jako iloczynów $\sqrt{1-x^2}$ i funkcji $\mathcal{C}_0^\infty(D)$ (parzystej lub nieparzystej). Podobną metodę rozwiązań zagadnień spektralnych można znaleźć w pracy [63]. Taka dekompozycja funkcji własnych pozwala równanie (28) przepisać jako nieskończony układ równań algebraicznych na współczynniki rozwinięcia. Niestety układ ten nie daje się ściśle rozwiązać. Odpowiednie obcięcie szeregów zamienia nieskończony układ równań układem skończonym, który dają się już rozwiązać numerycznie. Stwierdzenie to jest równoważne z przybliżaniem rozwiązań równania własnego iloczynem funkcji $\sqrt{1-x^2}$ i wielomianów.

Opisana powyżej procedura realizowana jest następująco

(i) Rozwiń funkcje własne, parzyste $\psi_e(x)$ i nieparzyste $\psi_o(x)$ według przepisu

$$\psi_e(x) = C\sqrt{1-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n}x^{2n}, \qquad \psi_o(x) = C\sqrt{1-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n+1}x^{2n+1}. \tag{31}$$

(ii) Podziałaj operatorem A_D na wyrażenia $x^{2n}\sqrt{1-x^2}$ oraz $x^{2n+1}\sqrt{1-x^2}$ otrzymując

$$\begin{aligned} A_D\left(x^{2n}\sqrt{1-x^2}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!(2n+1-2k)}{(1-2k)(k!)^2 4^k}x^{2n-2k}, \\ A_D\left(x^{2n+1}\sqrt{1-x^2}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!(2n+2-2k)}{(1-2k)(k!)^2 4^k}x^{2n-2k+1}. \end{aligned} \tag{32}$$

(iii) Rozwiń $\sqrt{1-x^2}$ w szereg Taylora. Przepisz równania własne dla funkcji parzystych i nieparzystych

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\alpha_{2n}\frac{(2k)!(2n+1-2k)}{(1-2k)(k!)^2 4^k}x^{2n-2k} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}E\alpha_{2n}\frac{(2k)!}{(1-2k)(k!)^2 4^k}x^{2n+2k}, \\ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\beta_{2n+1}\frac{(2k)!(2n+2-2k)}{(1-2k)(k!)^2 4^k}x^{2n-2k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}E\beta_{2n+1}\frac{(2k)!}{(1-2k)(k!)^2 4^k}x^{2n+2k+1}, \end{aligned} \tag{33}$$

(iv) Dołącz do układu (33) warunek znikania funkcji na brzegu D

$$\lim_{x\to\pm 1} A_D\psi_{e,o}(x) = 0. \tag{34}$$

(v) Urwij równania (33) na skończonej liczbie wyrazów otrzymując dla

(a) rodziny funkcji parzystych układ równań algebraicznych postaci

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^{n}\alpha_{2k}a_{k-i,k} = E\sum_{k=0}^{i}\alpha_{2k}c_{2(i-k)}, \qquad i = 0,1,\dots n-1, \\ \sum_{m=0}^{n}\left(\alpha_{2m+1}\sum_{k=0}^{m}a_{k,m}\right) = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

gdzie

$$c_{2k} = \frac{(2k)!}{(1-2k)(k!)^2 4^k}, \quad a_{k,n} = (2n+1-2k)c_{2k}, \quad n \geqslant k, \tag{36}$$

(b) rodziny funkcji nieparzystych układ równań algebraicznych postaci

$$\begin{gathered}\sum_{k=i}^{n} \beta_{2k+1} b_{k-i,k} = E \sum_{k=0}^{i} \beta_{2k+1} c_{2(i-k)}, \qquad i = 0, 1, \ldots n-1, \\ \sum_{m=0}^{n} \left(\beta_{2m+1} \sum_{k=0}^{m} b_{k,m} \right) = 0,\end{gathered} \tag{37}$$

gdzie

$$c_{2k} = \frac{(2k)!}{(1-2k)(k!)^2 4^k}, \quad b_{k,n} = (2n+2-2k)c_{2k}, \quad n \geqslant k. \tag{38}$$

Ponieważ funkcja podstawowa jest symetryczna to przybliżenie jej ma postać

$$\psi_1(x) \approx C\sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{2k} x^{2k}, \tag{39}$$

gdzie współczynniki α_{2k} dają się wyznaczyć dla każdego n przybliżenia $(k = 0, 1, \ldots, n)$. W pracy [A7] pokazano, że opisana wyżej metoda jest zbieżna. Jawnie wypisano współczynniki rozwinięcia dla wielomianu aż pięćsetnego stopnia. Tak otrzymane przybliżenie jest dużo dokładniejsze niż funkcja analityczna (29). Dla odpowiednio dużego n funkcja przybliżająca rozwiązanie własne może być dowolnie blisko funkcji własnej ze względu na miarę

$$|A_D\psi(x) - E\psi(x)|. \tag{40}$$

Układy równań (35) i (37) mają więcej niż jedno rozwiązanie. Niejako, za darmo, dostajemy przybliżenia parzystych, wyższych funkcji własnych. Tym sposobem w pracy [A7] wyznaczono przybliżoną trzecią i piątą funkcję własną.

Przybliżając rozwiązania nieparzyste funkcjami będącymi iloczynami $\sqrt{1-x^2}$ i wielomianów nieparzystego stopnia otrzymano przybliżenie drugiej i czwartej funkcji własnej. Wszystkie otrzymane funkcje porównano z przybliżeniami otrzymanymi innymi metodami [34] oraz [A4]. W tabeli zamykającej [A7] porównano wartości własne dla różnych stopni wielomianów przybliżających z wartościami z pracy [34].

Praca [A8] jest bezpośrednią kontynuacją badań prowadzonych w [A7]. Pokazano, że jeśli ψ jest wystarczająco porządna, np. $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$ to operator Cauchy dla $x \in D$ zdefiniowany

$$A_D\psi(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\psi(x)}{1-x^2} + \frac{1}{\pi}(p.v.)\int_{-1}^{1} \frac{\psi(x)-\psi(y)}{(x-y)^2} dy, \tag{41}$$

daje się wyrazić w postaci regularyzacji Hadamarda (skończona część Hadamarda) całek hiperosobliwych [64, 66, 67, 70]

$$A_D\psi(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{2\psi(x)}{\varepsilon} - \int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\psi(y)dy}{(y-x)^2} - \int_{x+\varepsilon}^{1} \frac{\psi(y)dy}{(y-x)^2}\right] \equiv -\frac{1}{\pi}(\mathcal{H})\int_{-1}^{1} \frac{\psi(y)dy}{(y-x)^2}. \tag{42}$$

Możliwe są też inne, równoważne definicje ułamkowego generatora na D

$$A_D\psi(x) = -\frac{1}{\pi}(\mathcal{H})\int_{-1}^{1} \frac{\psi(y)dy}{(y-x)^2} = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}(p.v)\int_{-1}^{1} \frac{\psi(y)dy}{y-x} = -\frac{1}{\pi}(p.v)\int_{-1}^{1} \frac{\psi'(y)dy}{y-x}, \tag{43}$$

jeśli tylko powyższe całki istnieją.

W pracy [A8] bezpośrednim rachunkiem wykazano, że funkcje $\cos(\pi x/2)$ oraz $\sin(\pi x)$

nie są funkcjami własnymi operatora (42, 43), co "intuicyjnie" przyjęto za pewnik w pracach [8–12]. Działanie operatora A_D na funkcje trygonometryczne prowadzi do pojawienia się sinusa i kosinusa całkowego, który jest osobliwy w zerze [68, 69]. Niemniej jednak, pojawiające się osobliwości są usuwalne.

W dalszej części [A8] badano przybliżenia rozwiązań własnych ułamkowego operatora (43). Tym razem zamiast iloczynów $\sqrt{1-x^2}$ i funkcji $\mathcal{C}_0^\infty(D)$ (jak w [A7]), użyto innej bazy (funkcji trygonometrycznych, rozwinięcia Fouriera). Jak już wspomniano rozwiązania własne procesu Cauchy na $D=(-1,1)$ są albo parzyste albo nieparzyste dlatego podstawowa funkcja własna daje się wyrazić w postaci nieskończonego szeregu kosinusów. Procedura przybliżania rozwiązań jest następująca

(i) Wybrać bazę funkcji $\psi_k(x)=\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2}$ podprzestrzeni funkcji parzystych oraz bazę $\chi_k(x)=\sin k\pi$ podprzestrzeni funkcji nieparzystych w $L^2(D)$ z iloczynem skalarnym

$$\int_{-1}^{1}\psi_k(x)\psi_l(x)dx=\int_{-1}^{1}\chi_k(x)\chi_l(x)dx=\delta_{kl},\quad \int_{-1}^{1}\psi_k(x)\chi_l(x)dx=0, \tag{44}$$

gdzie δ_{kl} jest deltą Kroneckera.

(ii) Podziałać operatorem A_D na funkcje

$$\psi_e(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\psi_k(x),\qquad \psi_o(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\chi_k(x), \tag{45}$$

(iii) Przepisać równanie własne w postaci

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kf_k(x)=E\sum_{k=0}^{\infty}a_k\psi_k(x),\qquad \sum_{k=0}^{\infty}b_kg_k(x)=E\sum_{k=0}^{\infty}b_k\chi_k(x), \tag{46}$$

gdzie

$$f_k(x)=-\frac{1}{\pi}(\mathcal{H})\int_{-1}^{1}\frac{\psi_k(y)dy}{(y-x)^2},\qquad g_k(x)=-\frac{1}{\pi}(\mathcal{H})\int_{-1}^{1}\frac{\chi_k(y)dy}{(y-x)^2}. \tag{47}$$

(iv) Pomnożyć równania (46) przez $\psi_i(x)$ i przez $\chi_i(x)$ odpowiednio i wycałkować po zbiorze $(-1,1)$ otrzymując równanie macierzowe

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\gamma_{ki}=Ea_i,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}b_k\eta_{ki}=Eb_i, \tag{48}$$

gdzie

$$\gamma_{ki}=\int_{-1}^{1}f_k(x)\psi_i(x)dx,\qquad \eta_{ki}=\int_{-1}^{1}g_k(x)\chi_i(x)dx. \tag{49}$$

Obcięcie powyższej procedury na skończoną ilość funkcji ψ_k czy χ_k w (45) powoduje, że (48) staje się skończonym układem równań, który daje się rozwiązać tradycyjnymi metodami. Jednocześnie urwane szeregi stają się przybliżeniami rozwiązań własnych. W pracy [A8] wyznaczono i porównano sześć początkowych wartości własnych z wynikami [33], a także zestawiono kształt funkcji własnych z analitycznym przybliżeniem [A7].

Praca [A9] jest kontynuacją badań podjętych w [A7, A8], rozszerzoną na dowolne, symetryczne procesy α-stabilne na odcinku $D=(-1,1)$. Praca ta pozwala spojrzeć na proces ultrarelatywistyczny w szerszym kontekście procesów stabilnych. Równanie własne dla dowolnego α ma postać

$$-C_\alpha(\mathcal{H})\int_{-1}^{1}\frac{\psi(y)dy}{|y-x|^{1+\alpha}}=E\psi(x), \tag{50}$$

gdzie stałą C_α zdefiniowano już w (3), a powyższą całkę rozumiemy w sensie skończonej części Hadamarda. Równanie (50) ma osobliwą postać tzw. alternatywy Fredholma [66] znanej w literaturze i szeroko stosowanej np. w propagacji pęknięć w fizyce ciała stałego [70]. Zgodnie z twierdzeniem Fredholma, jeśli jądro całkowe $K(x,y)$ jest nieosobliwe, tj. $\int_a^b\int_a^b K^2(x,y)dxdy < \infty$, to albo $\psi(x) = 0$ albo zbiór wartości własnych jest dyskretny, a zbiór funkcji własnych skończony [71]. W przypadku jąder osobliwych zbiór wartości własnych jest dyskretny, mimo nieskończonego zbioru funkcji własnych. W równaniu (50) jądro całkowe Fredholma $K(x,y) = C_\alpha|x-y|^{-1-\alpha}$ jest osobliwe.

Metoda rozwiązywania zagadnienia spektralnego polega na rozwinięciu funkcji własnych w szereg Fouriera i w swojej istocie jest taka jak w [A8]. Oczywiście dla $\alpha \neq 1$ działanie operatora A_D na funkcje trygonometryczne produkuje wyrażenia, które są bardziej złożone niż dla $\alpha = 1$ niemniej jednak równie dobrze nadają się do symulacji numerycznych. W pracy [A9] bardzo dokładnie zbadano zależność (kształt) wartości własnych (funkcji podstawowej i wzbudzonej) jako funkcji parametru α w całym zakresie zmienności, tj. dla $0 < \alpha \leqslant 2$. Ponadto dla kilku wartości $\alpha = 0.5, 1, 1.5$ wykreślono widmo (kilka początkowych wartości własnych), szczególnie interesujących w kontekście przejść między poziomami. Również kształt funkcji własnych został zbadany dla wybranych α. Jak pokazano w [A9] im większe α tym ilość funkcji trygonometrycznych niezbędna do "odpowiedniego" przybliżenia stanów własnych mniejsza. Oczywiście dla $\alpha = 2$ funkcja własna jest pojedynczą funkcją trygonometryczną.

W [A10] rozszerzono badania stanów związanych do przestrzeni trójwymiarowej. Badania te dotyczyły stanów związanych ultrarelatywistycznego operatora $(-\Delta)^{1/2}$ w nieskończonej sferycznej studni. Istnieje kilka ważnych powodów, dla których warto było zająć się tym problem. Po pierwsze ultrarelatywistycznemu operatorowi w przestrzeni 3D możemy nadać interpretację fizyczną w języku falowej mechaniki fotonu [72]. Po wtóre może on być naturalnym przybliżeniem "prawdziwego" quasirelatywistycznego generatora cząstki prawie bezmasowej. Może on także mieć interpretację szczególnego procesu Lévy (procesu Cauchy) uwięzionego w trójwymiarowej kuli.

Zagadnienia spektralne w przestrzeni trójwymiarowej quasirelatywistycznych operatorów w obecności potencjału harmonicznego, potencjału Coulomba były szeroko badane głównie w fizyce wysokich energii (najczęściej wspieranej numerycznie) [60, 73], w fizyce matematycznej [74–76] i zagadnieniach stabilności materii [77]. Literatura dotycząca zagadnień spektralnych ultrarelatywistycznego operatora w 3D jest bardzo uboga. Rozwiązanie zagadnienia własnego dla operatora Cauchy z potencjałem harmonicznym jest znane jedynie dla przypadku $l = 0$ [35]. W przypadku potencjału sferycznej studni pojawiły się pewne wyniki, w niedawno udostępnionych w archiwach elektronicznych pracach [36, 37, 63], gdzie znaleziono ograniczenia na wartości własne, związki między wartościami własnymi w 3D i 1D. Co prawda pojawiły się tam funkcje sferyczne, co sugerowało by związki z orbitalnym momentem pędu, jednak zagadnienia z $l \neq 0$, zostały odstawione na bok.

W pracy [A10] interesowała nas orbitalna zależność funkcji własnych ułamkowego operatora Cauchy w sferycznej studni od $l = 0, 1, 2, \ldots$ i oczekiwana degeneracja $|m| \leqslant l$. Niech $D = \{r \in \mathbb{R}^3 : |r| \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Operator Cauchy na D zadany jest zależnością

$$(-\Delta)^{1/2} f(\mathbf{r}) = (p.v.)\frac{1}{\pi^2}\left[\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(\mathbf{r})}{(\mathbf{u}-\mathbf{r})^4}d^3u - \int_D \frac{f(\mathbf{u})}{(\mathbf{u}-\mathbf{r})^4}d^3u\right]. \tag{51}$$

Metoda znajdowania funkcji własnych i wartości własnych jest bardzo podobna do tej z pracy [A7]. W [A10] zaproponowano funkcję

$$f(\mathbf{r}) = \psi(r) = C\sqrt{1-r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n}r^{2n}, \qquad \alpha_0 = 1, \tag{52}$$

gdzie C jest stałą normalizacji, jako funkcję podstawową operatora $(-\Delta)^{1/2}$ na D. Ze względu na symetrię radialną zagadnienia wystarczy rozwiązać równanie własne np. w punkcie $(0,0,|z|)$. Działanie operatora ułamkowego na wyrażenia postaci $r^{2n}\sqrt{1-r^2}$ daje

$$(-\Delta)^{1/2} r^{2n}\sqrt{1-r^2}(0,0,|z|) = (2c_{2n} + 4c_{2n-2}r^2 + \ldots + (2n+2)c_0 r^{2n}(0,0,|z|), \tag{53}$$

gdzie c_{2n} są współczynnikami rozwinięcia $\sqrt{1-r^2}$ w szereg Taylora. Po podstawieniu (52) do równania własnego otrzymujemy równanie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k}|z|^{2k-2j} = E \sum_{k,j=0}^{\infty} c_{2j}\alpha_{2k}|z|^{2k+2j}, \tag{54}$$

gdzie $a_{j,k} = 2(k-j+1)c_{2j}$ na niewiadome α_{2k}. Ponieważ nie potrafimy rozwiązać powyższego równania w sposób ścisły więc wykonujemy podobny zabieg jak w [A7] urywając nieskończony szereg (52) na skończonej liczbie wyrazów. Dzięki temu równanie (54) możemy zastąpić układem równań, których nie będziemy w tym miejscu wypisywać, a które można rozwiązać z pomocą pakietu Wolfram Mathematica. Przybliżenie funkcji własnej jest wówczas iloczynem $\sqrt{1-r^2}$ i wielomianu $w_{2k}(r)$ stopnia $2k$. W pracy [A10] wyznaczono współczynniki α_{2k} dla kolejnych $k = 1, 2, \ldots, 250$. Pokazano, że przybliżenia są zbieżne ze względu na miarę $|(-\Delta)^{1/2}\psi(r) - E\psi(r)|$. Układ równań (30) pracy [A10] pozwala wyznaczyć więcej niż jedno rozwiązanie, co oznacza, że za darmo otrzymujemy przybliżenia wyższych, radialnych funkcji własnych. W [A10] wyznaczono przybliżenia $\psi_{(n,l=0)}(r)$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ jako iloczyny pierwiastka z $1 - r^2$ oraz wielomianu stopnia pięćsetnego. W [A10] zaprezentowano też graficznie gęstości prawdopodobieństwa $|\psi_{(n,l=0)}(r)|^2$ we współrzędnych biegunowych.

W [A10] rozszerzono spostrzeżenia z [36] dotyczące związków między wartościami własnymi w przestrzeniach 3D i 1D. Pokazano, że kolejne wartości własne funkcji radialnych w 3D są równe wartościom własnym odpowiadającym nieparzystym funkcjom własnym w 1D. Ponadto pokazano, że jeśli $\psi(z)$ jest radialną funkcją własną w 3D (rozszerzoną parzyście na ujemne z), to funkcja $z\psi(z)$ jest funkcją własną zagadnienia jednowymiarowego ($z\psi(z)$ jest funkcją nieparzystą). Stwierdzenie odwrotne jest również prawdziwe, zatem mamy wzajemną odpowiedniość między funkcjami z przestrzeni 1D i 3D

$$\begin{array}{cc} \psi_{2n}(x) = C\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k+1}x^{2k+1}, & \psi_{(n,0)}(r) = C\sqrt{1-r^2}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k}r^{2k}, \\ d=1, & d=3, \end{array} \tag{55}$$

gdzie $\beta_{2k+1} = \alpha_{2k}$, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Powyższa relacja między funkcjami własnymi nie zachodzi jedynie dla procesu Cauchy'ego. W [A10] wskazano, że podobna własność zachodzi także dla rozwiązań własnych tradycyjnego równania Schrödingera w 1D i 3D. Istnieje przypuszczenie, że relacje między rozwiązaniami radialnymi w 3D i nieparzystymi funkcjami własnymi w 1D zachodzą dla dowolnego, symetrycznego procesu α-stabilnego, a być może zachodzą także dla innych potencjałów V o symetrii sferycznej. Dzięki powyższemu stwierdzeniu i wynikowi z [A7] (porównaj z (30)) mamy przybliżenie funkcji podstawowej w 3D w postaci analitycznej

$$\psi(r) = C\frac{\sin(\beta r)\sqrt{(1-r^2)\cos(\beta r)}}{r}, \tag{56}$$

gdzie stała normująca $C = 0.796658$, a parametr $\beta = 1760\pi/4096$.
Jak pokazano w [A10] istnieją też inne funkcje własne niż funkcje radialne operatora Cauchy w sferycznej studni. Można wykazać (metodami jak powyżej), że także funkcje postaci

$$xf(r), \qquad yf(r), \qquad zf(r), \tag{57}$$

gdzie funkcja $f(r)$ jest funkcją radialną

$$f(r) = \sqrt{1-r^2}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k}r^{2k}, \qquad \beta_0 = 1, \tag{58}$$

są rozwiązaniami własnymi. Zwyczajowo tą trójkę rozwiązań wyrażamy jako iloczyny funkcji radialnych i harmonik sferycznych (wybierając odpowiednie kombinacje liniowe). Funkcje własne z $l = 1$ mają postać

$$\psi_{(n,l=1,m)}(\mathbf{r}) = Cf(r)Y_{l=1}^{m}(\theta, \phi), \tag{59}$$

gdzie $m = -1, 0, 1$, a $Y_l^m(\theta, \phi)$ są harmonikami sferycznymi. W [A10] wyznaczono współczynniki w rozwinięciu funkcji (58) obciętego do iloczynu $\sqrt{1-r^2}$ i wielomianu pięćsetnego stopnia. Pokazano kształt funkcji radialnych i gęstość prawdopodobieństwa dla $n = 1, 2$.

Stosując metody opisane powyżej, w [A10] wykazano, że istnieją także rozwiązania z $l = 2, 3$, które są postaci iloczynu funkcji radialnej i odpowiedniej harmoniki sferycznej. Niestety nie znamy jawnego przepisu w postaci wzoru analitycznego na funkcję radialną (być może wzór taki nie istnieje) ale możemy ją w zasadzie dowolnie przybliżać. Dzięki ogólnej procedurze możliwe było wyznaczenie współczynników rozwinięcia, a tym samym uzyskać zadowalające przybliżenia funkcji własnych. W [A10] podano też ogólny przepis na rozwiązania własne dla dowolnego l. Warto także wspomnieć, że jedna z krzywych pracy [A10] posłużyła jako ilustracja strony tytułowej w J. Math. Phys.

Kończąc, w rozdziale tym przedstawiono metody rozwiązywania zagadnień spektralnych procesu ultrarelatywistycznego na skończonym zbiorze (odcinku w 1D i kuli w 3D). Prezentowane tutaj metody z powodzeniem można rozciągnąć na przestrzenie 2D, 4D i wyższe, jak również na dowolne procesy α-stabilne.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

5. a. Przed uzyskaniem stopnia doktora

I. Dynamika mikrownękowych polarytonów w przybliżeniu Markowa [B2]

Ekscyton to stan związany elektronu wzbudzonego do pasma przewodnictwa i dziury pozostałej w pasmie walencyjnym w wyniku oddziaływania kulombowskiego. Ekscytony przeważnie oddziałują z fotonami, choć zazwyczaj oddziaływanie to jest zbyt słabe, by rozważać je jako zaburzenie w teorii fermionów [78]. Aby zwiększyć oddziaływanie ekscytonów z fotonami konstruuje się półprzewodnikowe mikrownęki, które więżą światło. Uwięzione fotony silnie oddziałują z ekscytonowymi rezonansami i nie można traktować ich jako samoistne byty. W reżimie silnego oddziaływania pojawiają sie nowe kwazi-czastki nazywane mikrownękowymi polarytonami [79]. W ten sposób półprzewodnikowe mikrownęki zapewniają idealne warunki do badania sprzęgnięcia kwantowej optyki i fizyki statystycznej oddziałujących bozonów.

W pracy wyprowadzono równanie mistrzowskie zredukowanej macierzy gęstości mikrownękowych polarytonów oddziałujących z rezerwuarem wysokoenergetycznych ekscytonów. Różne markowskie przybliżenia ewolucji (granica słabego oddziaływania, granica osobliwego oddziaływania i inne, zobacz [80]) przejawiają się jedynie w różnych wartościach współczynników w równaniu mistrzowskim. Ogólna postać równania mistrzowskiego jest taka sama, niezależnie od wziętego przybliżenia. Warto zauważyć, że takie same równania otrzymamy również po dołączeniu wyższych członów oddziałujących ekscytonów. Jak należało oczekiwać, asymptotyczne zachowanie się gałęzi polarytonów zależy od temperatury rezerwuaru. Wykazano, że elementy diagonalne macierzy gęstości ewoluują niezależnie od pozadiagonalnych. Układ polarytonów ewoluuje do jedynego stanu równowagowego, który jest stanem termicznym. Szczegółowo przeanalizowano przypadki zerowej temperatury (elementy pozadiagonalne są tłumione eksponencjalnie, stanem równowagowym jest próżnia) oraz przypadek nieskończenie wysokiej temperatury (brak stanu równowagowego). Mimo, że praca ma charakter czysto teoretyczny, jej wyniki mogą być zweryfikowane eksperymentalnie.

II. Dynamika zdegenerowanego optycznego oscylatora parametrycznego (DOPO) w polu o sciśnietych fluktuacjach [B3]

Manipulowanie polami elektromagnetycznymi w optycznej wnęce jest jednym z największych osiągnięć optyki kwantowej dzisiejszych czasów. Odkrycie procesów nieliniowych, takich jak proces parametrycznego obniżenia częstości czy proces mieszania czterech fal, pozwoliło rozwinąć miedzy innymi inżynierię stanów ściśniętych [81–83], które są używane w wielu obszarach optyki kwantowej. Tradycyjnie rozważa się rezerwuary termiczne lub próżnię, niemniej jednak jak pokazano np. w [9] pewne nowe cechy ewoluującego, wnękowego pola elektromagnetycznego mogą być obserwowane jeśli zastosuje się rezerwuar ze ściśniętymi fluktuacjami.

W pracy rozważano ewolucję wnękowych modów oddziałujących z zewnętrznym polem w stanie ściśniętym. W zdegenerowanym parametrycznym oscylatorze sygnał o częstości ω jest wzmacniany medium pompującym. Dodatkowo założono, że mod wnękowy oddziałuje liniowo z zewnętrznym, silnym polem. Mody pola wyciekają jednym z luster i oddziałują na zewnątrz wnęki z polami, które stanowią rezerwuar. Ewolucję macierzy gęstości pola wnękowego w rezerwuarze o ściśniętych fluktuacjach zadaje przybliżenie Markowa [85, 86].

Równanie mistrzowskie dla macierzy gęstości pola wnękowego zostało rozwiązane analitycznie w obrazie Heisenberga. Przeanalizowano długoczasowe, asymptotyczne własności macierzy gęstości w zależności od wartości parametrów równania mistrzowskiego. Pokazano, że dla pewnego wyboru parametrów, istnieje jedyny równowagowy stan asymptotyczny, do którego dążą wszystkie stany, niezależnie od wyboru stanu początkowego. Stan równowagowy jest przesuniętym i ściśniętym stanem termicznym. W pracy przestudiowano własności stanu asymptotycznego, analizując parametr temperaturowy i parametr ściskania. Wszystkie otrzymane w pracy wyniki są analityczne.

III. Dynamika SPL NOPO z niesymetrycznymi pętlami sprzężenia zwrotnego [B4]

Splątanie w układach o ciągłych stopniach swobody jest w ostatnich latach intensywnie badane. Możliwość istnienia splątania w układach o ciągłych stopniach swobody sformułowano po raz pierwszy w [87–89], a następnie zweryfikowano eksperymentalnie dla niezdegenerowanego optycznego oscylatora parametrycznego (NOPO) [90]. Od tego czasu osiągnięto olbrzymi postęp w opisie teoretycznym jak również w doświadczalnej implementacji splątanych stanów pola elektromagnetycznego. Dodatkowo, w celu eliminacji dyfuzji różnicy faz pomiędzy subharmonicznymi składowymi pola wnękowego można zastosować metodę więzienia fazy. Dla przykładu, jak pokazano w [91, 92] użycie NOPO z tzw. uwięzieniem fazy (SPL NOPO), tj. układu: kryształ nieliniowy II typu i ćwierćfalówka we wnęce może zredukować wpływ procesów dyfuzyjnych. Zastosowanie ćwierćfalówki umożliwia liniowe mieszanie spolaryzowanych modów sygnałowego i jałowego, co w konsekwencji prowadzi do fazowego zamknięcia obu modów we wnęce. Pełna kwantowo mechaniczna analiza takich układów została zaproponowana w [93], a jego eksperymentalną realizację zaprezentowano w [94].

W układzie SPL NOPO z niesymetrycznymi pętlami sprzężenia zwrotnego wyprowadzono równanie mistrzowskie i pokazano, że jest to poprawne równanie ewolucji macierzy gęstości, co przy olbrzymiej liczbie parametrów nie było oczywiste. Stosując przejście do obrazu Heisenberga, możliwe było analityczne rozwiązania równania master w języku operatorów Weyla. W pracy pokazano, że różna siła sprzężenia pętli sprzężenia zwrotnego może powodować ściśnięcie termicznego rezerwuaru i dodatkowo prowadzi do procesu obniżenia częstości w każdym modzie pola. Dowiedziono, że w pewnym reżimie parametrów, istnieje stan równowagowy ewolucji i jest to stan gaussowski.

Pokazano, że niesymetryczne sprzężenie zwrotne może powodować zwiększenie splątania stanu równowagowego. Dynamika splątania modów wewnątrzwnękowych została szczegółowo przeanalizowana dla różnych początkowych macierzy gęstości. Wykazano także, że w układzie SPL NOPO może dochodzić do nagłej śmierci, narodzin i opóźnionych narodzin splątania.

5. b. Po uzyskaniu stopnia doktora

I. Asymptotyczne splątanie dwóch atomów w polu o ściśniętych fluktuacjach [C1]

Dynamiczne tworzenie splątania poprzez pośrednie oddziaływanie układów przestrzennie odizolowanych było powszechnie badane w literaturze, szczególnie w przypadku atomów dwupoziomowych oddziałujących ze wspólną próżnią. Pomysł, że dyssypacja może tworzyć splątanie, a nie niszczyć pojawił się w [95–98]. Ewolucję układów kwantowych, w tym układów dwupoziomowych w pewnym rezerwuarze opisuje równanie mistrzowskie (master equation), które składa się z części hamiltonowskiej i części dysypatywnej [B2-B4]. W przypadku tradycyjnych rezerwuarów typu kwantowa próżnia czy rezerwuar termiczny ewolucja została dokładnie zbadana i znana jest jawna postać stanów asymptotycznych czy stanów równowagowych [95, 99]. W przypadku rezerwuaru ze ściśniętymi fluktuacjami znane są jedynie stany stacjonarne dla pewnego zbioru parametrów początkowych [100]. Rozważanie takich rezerwuarów powoduje pojawienie się dodatkowych parametrów w równaniu mistrzowskim, co znacznie komplikuje rozważania. Niemniej jednak sytuacja nie jest beznadziejna.

W pracy badano ewolucję układów dwupoziomowych oddziałujących z fotonowym rezerwuarem w stanie ściśniętej próżni. Ewolucja czasowa takiego układu istotnie zależy przede wszystkim od odległości między atomami. Gdy atomy są przestrzennie oddzielone istnieje jedyny stan asymptotyczny ewolucji, który może być splątany, w przeciwieństwie do analogicznych układów dwupoziomowych w termicznym rezerwuarze. W przypadku gdy odległości międzyatomowe są małe, istnieją nietrywialne stany asymptotyczne, które są parametryzowane wiernością F (*fidelity*) i parametrami N i M charakteryzującymi ściśnięty rezerwuar. Oczywiście stan asymptotyczny zależy również od częstotliwości odstrojenia (różnicy częstości między częstotliwością przejścia atomowego i częstotliwości pola fotonowego). W układzie dwóch qubitów w termicznym rezerwuarze [101] istnieje stan stacjonarny zależny od F, którym możemy manipulować. Ponadto istnieje pewna krytyczna wartość F, powyżej której stany stacjonarne są uogólnionymi (termicznymi) stanami Wernera.

Jak pokazano, w układach atomów dwupoziomowych w rezerwuarze ściśniętej próżni, istnieją wierności F_1 i F_2, dla których istnieje jakościowa zmiana stanu asymptotycznego. Jeśli tylko F jest większe od progu F_2, to stan asymptotyczny jest splątany (podobnie jak w rezerwuarze termicznym [101]). Niezerowe splątanie może także zachodzić, dla F mniejszych od F_1 czy także dla $F = 0$, co jest wyłącznie możliwe w rezerwuarze ściśniętej próżni. Gdy atomy są w rezonansie z polem fotonowym i $|M| = \sqrt{N(N+1)}$, stan asymptotyczny, odpowiadający zerowej wierności jest czystym stanem splątanym, zwanym dwuatomowym stanem ściśniętym.

II. Ultrarelatywistyczne stany związane w płytkiej sferycznej studni potencjału [C13]

Praca [C13] stanowi rozszerzenie opisanych powyżej metod na przypadek przestrzeni trójwymiarowych. W [C13] rozważano zagadnienie własne nielokalnego, trójwymiarowego, ultrarelatywistycznego operatora z płytkimi potencjałami sferycznie-symetrycznej, skończonej studni o głębokości V_0. Dla procesów α-stabilnych w skończonej studni w jednym wymiarze stan podstawowy zawsze istnieje (niezależnie od głębokości V_0 studni) gdy $1 \leqslant \alpha < 2$, podczas gdy dla $0 < \alpha < 1$ istnienie stanu podstawowego wymaga by głębokość studni nie była zbyt mała [102, 103]. W przestrzeni dwuwymiarowej oczekuje się, istnienia stanu podstawowego dla dowolnego $\alpha \in (0, 2)$, gdy studnia jest wystarczająco głęboka [104, 105], choć możliwe jest wykazanie istnienia stanu podstawowego dla dowolnej głębokości $V_0 > 0$ gdy $1 < \alpha < 2$ [103]. W przestrzeniach $d \geqslant 3$ wymiarowych istnienie stanu podstawowego może być osiągalne jedynie dla wystarczająco głębokich studni dla dowolnego $\alpha \in (0, 2)$. Głównym celem [C13] było znalezienie głębokości V_0 sferycznej studni, dla których może istnieć stan podstawowy, a także zbadanie jak głębokość studni wpływa na pojawianie się kolejnych funkcji własnych. Przypomnieć w tym miejscu należy, że zarówno w [A4] jak i w [A5] badano problem istnienia związanych stanów własnych w zależności od głębokości studni. Dla przykładu w [A4] pokazano, że operator ultrarelatywistyczny w jednym wymiarze z potencjałem studni o głębokości $V_0 = 5$ posiada jedynie trzy funkcje własne. W [A5] przeanalizowano liczbę stanów własnych dla $V_0 = 5$ w zależności od parametru masowego m quasirelatywistycznego operatora $H = T_m + V$ (patrz (20)). Wykazano, że istnieją trzy funkcje własne gdy $m \leqslant 0.1$ podczas gdy dla dużych m ($m \gg 1$), lub w nierelatywistycznym zagadnieniu własnym istnieje tylko jedna. Niestety nie istnieje żadna konsystentna teoria określająca liczbę rozwiązań zagadnienia własnego operatora Cauchy w dowolnej przestrzeni w zależności od głębokości studni. Praca [C13] pozwala łatwiej zajrzeć w głąb tej problematyki, lepiej zrozumieć jej cechy i daje odpowiedź dla płytkich studni. W przestrzeniach trójwymiarowych poszukiwanie rozwiązań równania własnego, które nie było by rozwiązaniem radialnym nie jest zadaniem łatwym (zobacz np. [35], gdzie znaleziono jedynie stany własne $l = 0$ dla ultrarelatywistycznego oscylatora w 3D). W pracy [C13] wykazano, że istnieją inne niż radialne stany własne skończonej, sferycznie-symetrycznej studni, co możliwe jest jedynie gdy studnia nie jest zbyt płytka.

Ideę znajdowania rozwiązań własnych można przedstawić w kilku krokach. Po pierwsze poszukujemy rozwiązań w postaci iloczynu funkcji radialnej i harmoniki sferycznej. Po drugie po wycałkowaniu po kątach w nielokalnym operatorze całkowym, otrzymujemy nowy operator działający na funkcję zależną jedynie od współrzędnej radialnej. Prowadzi to do problemu spektralnego z nowym operatorem całkowym, które rozwiązujemy stosując, opisany powyżej algorytm Stranga dla funkcji radialnej oraz pamiętając przeprowadzić iloczyny skalarne i normowanie w przestrzeni trójwymiarowej. Związane stany własne mogą istnieć jedynie gdy wartości własne energii otrzymane z algorytmu są mniejsze niż głębokość studni V_0. Idea poszukiwania rozwiązań spektralnych w zależności od głębokości V_0 studni jest następująca. Zmieniamy V_0 i sprawdzamy czy zmiana ta spowodowała zmianę liczby funkcji własnych. Mówiąc precyzyjniej stosując przedstawioną tutaj metodę wyznaczono głębokość studni, poniżej której nie istnieje stan własny ($V_0 = 2$) oraz głębokość studni, dla której istnieje stan własny ($V_0 = 2.1$). To oznacza, że istnieje głębokość $V_0 \in (2, 2.1)$ studni, dla której pojawia się związany stan podstawowy symetrycznej studni w $3D$. Równolegle wykazano związek między rozwiązaniami radialnymi w $3D$ i rozwiązaniami nieparzystymi w przestrzeni $1D$. Wartości własne radialnych funkcji w przestrzeni trójwymiarowej są równe wartościom własnym odpowiadającym nieparzystym funkcjom własnym, tzn. $E_{(k,0)}(d = 3) = E_{2k}(d = 1)$. Związek ten pozwala sformułować zagadnienie poszukiwania głębokości studni w $3D$, dla której istnieje stan związany w języku rozwiązań w $1D$. Można powiedzieć, że o ile w $1D$ stan podstawowy istnieje zawsze ($\alpha = 1$), o tyle stan wzbudzony wymaga, by studnia nie była zbyt płytka i głębokość ta jest jednocześnie głębokością sferycznie symetrycznej studni w przestrzeni trójwymiarowej, dla której pojawia się stan podstawowy. W języku teorii procesów stochastycznych powiedzielibyśmy raczej, że rozwiązanie własne istnieje jeśli proces, którego generatorem jest operator $H = T + V$ jest powracający [102–105].

W pracy [C13] zgłębiono zagadnienie istnienia funkcji własnych dla $l = 0, 1, 2$ aż do $V_0 \leqslant 8.3$. W tabeli VI pracy [C13] zestawiono wartości własne, dla różnych głębokości studni. Zaprezentowano rozwiązania radialne (graficznie), jak również gęstości prawdopodobieństwa znalezienia procesu Cauchy wewnątrz i na zewnątrz studni. Gęstość prawdopodobieństwa procesu ultrarelatywistyczengo, podobnie jak dla cząstki masywnej w trójwymiarowej, skończonej, sferycznie-symetrycznej studni w mechanice kwantowej możemy wyrazić przy pomocy dwóch parametrów r i θ; nie ma zależności od kąta ϕ. Własność ta pozwala na prezentację gęstości prawdopodobieństwa graficznie w układzie biegunowym. Oczywiście proces ultrarelatywistyczny może tunelować przez skończone bariery, co wyraźnie widać na wykresach. Praca to rozszerza wyniki pracy [A10] (omówione w poprzednim rozdziale) na przypadek procesów Cauchy w skończonej studni potencjału (z warunkami brzegowymi Dirichleta). Praca ta może być także pretekstem i źródłem inspiracji w próbie zrozumienia jak (możliwie w dużych skalach przestrzennych) energia może być akumulowana bądź przechowywana w postaci stanów związanych kwantowych równań typu Schrödingera pozbawionych masy.

Literatura

[1] S. Chandrasekhar, *Stochastic Problems in Physics and Astronomy*, Rev. Mod. Phys. **15**, (1943), 1,

[2] P. Lévy, *Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 2 **3**, 1934, 337,

[3] P. Lévy, *Theorie de l'addition des variables aléatiores*, Paris: Gautier-Villars, (1937),

[4] P. Lévy, *Processes Stochastiques et Mouvement Brownian*, Paris: Gautier Villars, (1948),

[5] J. Bertoin, *Lévy processes*, Cambridge University Press, Cambridge (1996),

[6] O. E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S. I. Resnick, *Lévy Processes: Theory and Applications*, Springer Science & Business Media, (2001),

[7] P. Garbaczewski and V. A. Stephanovich, *Lévy flights and nonlocal quantum dynamics*, J. Math. Phys. **54**, (2013), 072103,

[8] N. Laskin, *Fractional quantum mechanics*, Phys. Rev. E **62**, (2000), 3135,

[9] N. Laskin, *Fractional Schrödinger equation*, Phys. Rev. E **66**, (2002), 056108,

[10] J. Dong, M. Xu, *Applications of continuity and discontinuity of a fractional derivative of the wave functions to fractional quantum mechanics*, J. Math. Phys. **49**, (2008), 052105,

[11] S. S. Bayin, *On the consistency of the solutions of the space fractional Schrödinger equation*, J. Math. Phys. **53**, (2012), 042105; **53**, (2012), 084101,

[12] J. Dong, *Lévy path integral approach to the solution of the fractional Schrodinger equation with infinite square well*, e-print arXiv:1301.3009v1, unpublished,

[13] K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Academic Press, Inc. (1974),

[14] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, and J. Klafter, *Strange kinetics*, Nature **363**, (1993), 31,

[15] J. Klafter, M. F. Shlesinger, and G. Zumofen, *Beyond brownian motion*, Phys. Today **49**, (1996), 33,

[16] Y. Zhang, et al., *Propagation dynamics of a light beam in fractional Schrödinger equation*, Phys. Rev. Lett. **115**, (2015), 180403,

[17] C. K. Peng, et al., *Long-range anticorrelations and non-Gaussian behavior of the heartbeat*, Phys. Rev. Lett. **70**, (1993), 1343,

[18] R. Segev, et al., *Long Term Behavior of Lithographically Prepared In Vitro Neuronal Networks*, Phys. Rev. Lett. *88*, (2002), 118102,

[19] O. Sotolongo-Costa, et al., *Lévy Flights and Earthquakes*, Geophys. Rev. Lett. **27**, (2000), 1965,

[20] S. A. Kassam, *Signal Detection in Non-Gaussian Noise*, Springer, (1988),

[21] E. J. Wegman, S. C. Schwartz, and J. B. Thomas (Eds.), *Topics in Non-Gaussian Signal Processing*, Springer, (1989),

[22] C. L. Nikias and M. Shao, *Signal Processing with Alpha-Stable Distributions and Applications*, Wiley, (1995),

[23] W. Schoutens, *Lévy Processes in Finance*, Wiley Finance, New York, (2003),

[24] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, *An Introduction to Econophysics*, Cambridge University Press, (2000),

[25] J. P. Bouchaud and M. Potters, *Theory of Financial Risk*, Cambridge University Press, (2000),

[26] P. Garbaczewski and V. A. Stephanovich, *Lévy flights in inhomogeneous environments*, Physica A **389**, (2010), 4419,

[27] J. Lőrinczi and J. Małecki, *Spectral properties of the massless relativistic harmonic oscillator*, J. Diff. Eq. **253**, (2012), 2846,

[28] S. O. Durugo, *A class of extended Airy functions of the first kind and spectral properties of the massless relativistic quartic anharmonic oscillator*, PhD Thesis, Loughborough University, UK, (2014),

[29] J. Lőrinczi, K. Kaleta, S. O. Durugo, *Spectral and Analytic Properties of Non-local Schrödinger Operators and Related Jump Processes*, Comm. in App. and Industrial Math. **6** (2), (2014), 534,

[30] R. Bañuelos and T. Kulczycki, *The Cauchy process and the Steklov problem*, J. Funct. Anal. **211**, (2004), 355,

[31] K. Kaleta i T. Kulczycki, *Intrinsic Ultracontractivity for Schrödinger Operators Based on Fractional Laplacians*, Potential Anal. **33**, (2010), 313,

[32] A. N. Hatzinikitas, *Spectral properties of the Dirichlet operator* $\sum_{i=1}^{d}(-\partial_i^2)^s$ *on domains in d-dimensional Euclidean space*, J. Math. Phys. **54**, (2013), 103501,

[33] T. Kulczycki, M. Kwaśnicki, J. Małecki i A. Stós, *Spectral properties of the Cauchy process on half-line and interval*, Proc. London Math. Soc. **101**, (2010), 589,

[34] M. Kwaśnicki, *Eigenvalues of the fractional Laplace operator in the interval*, J. Funct. Anal. **262**, (2012), 2379,

[35] K. Kowalski, J. Rembielinski, *Relativistic massless harmonic oscillator*, Phys. Rev. A **81**, (2010), 012118,

[36] B. Dyda, A. Kuznetsov, and M. Kwaśnicki, *Eigenvalues of the fractional Laplace operator in the unit ball*, e-print arXiv: 1509.08533 (2015),

[37] B. Dyda, A. Kuznetsov, and M. Kwaśnicki, *Fractional Laplace operator and Meijer G-function*, e-print arXiv:1509.08529 (2015),

[38] S. Jespersen, R. Metzler, and H. C. Fogedby, *Levy flights in external force fields: langevin and fractional Fokker-Planck equations, and their solutions*, Phys. Rev. E, **59**, (1999), 2736,

[39] D. Brockmann, I. M. Sokolov, *Lévy flights in external force fields: From models to equations*, Chem. Phys. **284**, (2002), 409,

[40] M. H. Cohen, I. I. Eliazar, *Econophysical visualization of Adam Smiths invisible hand*, Physica A **392**, (2013), 813,

[41] L. Chen, M. W. Deem, *Reaction, Lévy flights, and quenched disorder*, Phys. Rev. E **65**, (2001), 011109,

[42] D. Brockmann, T. Geisel, *Lévy Flights in Inhomogeneous Media*, Phys. Rev. Lett. **90**, (2003), 170601,

[43] V.V. Belik, D. Brockmann, *Accelerating Random. Walks by Disorder*, New. J. Phys. **9**, (2007), 54,

[44] H. Risken, *The Fokker-Plack Equation*, Springer, (1989),

[45] P. Garbaczewski and R. Olkiewicz, *Cauchy noise and affiliated stochastic processes*, J. Math. Phys. **40**, (1999), 1057,

[46] P. Garbaczewski and V. A. Stephanovich, *Lévy flights in confining potentials*, Phys. Rev. E, **80**, (2009), 031113,

[47] I. Eliazar, J. Klafter, *Lévy-Driven Langevin Systems: Targeted Stochasticity*, J. Stat. Phys. **111**, (2003), 739,

[48] D. T. Gillespie, *A General Method for Numerically Simulating Time Evolution of Coupled Chemical Reactions*, J. Comput. Phys. **22**, (1976), 403,

[49] D. T. Gillespie, *Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions*, J. Phys. Chem. **81**, (1977), 2340,

[50] K. Kowalski and J. Rembieliński, *Salpeter equation and probability current in the relativistic quantum mechanics*, Phys. Rev. A **84**, (2011), 012108,

[51] P. Bader, S. Blanes, and F. Casas, *Solving the Schrödinger eigenvalue problem by the imaginary time propagation technique using splitting methods with complex coefficients*, J. Chem. Phys. **139**, (2013), 124117,

[52] M. Kwaśnicki, *The equivalent definitions of the fractional Laplace operator*, preprint, (2015), arXiv:1507:07356,

[53] M. Aichinger and E. Krotscheck, *A fast configuration space method for solving local KohnSham equations*, Comput. Mater. Sci. **34**, (2005), 188,

[54] J. Auer and E. Krotschek, *A fourth-order real-space algorithm for solving local Schrodinger equations* J. Chem. Phys. **115**, (2001), 6841,

[55] S. Janecek and E. Krotscheck, *A fast and simple program for solving local Schrödinger equations in two and three dimensions* Comput. Phys. Commun. **178**, (2008), 835,

[56] S. A. Chin, S. Janecek, and E. Krotscheck, *An arbitrary order diffusion algorithm for solving Schrodinger equation*, Comput. Phys. Commun. **180**, (2009), 1700,

[57] P. Amore et al., *Collocation method for fractional quantum mechanics* J. Math. Phys. **51**, (2010), 122101,

[58] A. Zoia, A. Rosso, and M. Kardar, *Fractional Laplacian in a bounded domain*, Phys. Rev. E **76**, (2007), 021116,

[59] R.L. Hall, W. Lucha, F.F. Schöberl, *Discrete spectra of semirelativistic Hamiltonians*, Int. J. Mod. Phys. A **18**, (2003), 2657,

[60] Z. F. Li et al., *Relativistic harmonic oscillator*, J. Math. Phys. **46**, (2005), 103514,

[61] M. Kwaśnicki, *Eigenvalues of the Cauchy process on an interval have at most double multiplicity*, Semigroup Forum **79**, (2009), 183,

[62] P. Garbaczewski, R. Olkiewicz, *Feynman-Kac kernels in Markovian representations of the Schrödinger interpolating dynamics*, J. Math. Phys. **37**, (1996), 732,

[63] B. Dyda, *Fractional calculus form power functions and eigenvalues of the fractional Laplacian*, Fractional Calculus Appl. Anal. **15**, (2012), 536,

[64] J. Hadamard, *Lectures on Cauchys Problem in Linear Partial Differential Equations*, Dover, NY (1952),

[65] W. T. Ang, *Hypersingular Integral Equations in Fracture Analysis*, Woodhead Publ., Cambridge, (2013),

[66] Y. S. Chan, A. C. Fannjiang, G. H. Paulino, *Integral equations with hypersingular kernelstheory and applications to fracture mechanics*, Int. J. Eng. Sci. **41**, (2003), 683,

[67] J. de Klerk, *Cauchy principal value and hypersingular integrals*, Web notes, 2011 (available through http://www.nwu.ac.za/sites/www.nwu.ac.za/files/files/p-ubmi/documents/hipersinintegrale.pdf),

[68] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Eighth Edition by Daniel Zwillinger and Victor Moll, (2014),

[69] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Special Functions*, National Bureau of Standards, NY, (1964),

[70] W. T. Ang, *Hypersingular Integral Equations in Fracture Analysis*, Woodhead Publishing, Cambridge, (2013),

[71] A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations*, Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton-London, (2008),

[72] I. Białynicki-Birula and Z. Białynicka-Birula, *The role of the Riemann-Siberstein vector in classical and quantum theories of electromagnetism*, J. Phys. A: Math. Gen. **46**, (2013), 053001,

[73] R. L. Hall and W. Lucha, *Schrödinger models for solutions of the Bethe-Salpeter equation in Minkowski space*, Phys. Rev. D **85**, (2012), 125006,

[74] R. Weder, *Spectral properties of one body relativistic spin zero Hamiltonians*, Ann. Inst. Henri Poincare, XX **2**, (1974), 211,

[75] R. Weder, *Spectral analysis of pseudodifferential operators*, J. Funct. Anal. **20**, (1975), 319,

[76] I. W. Herbst, *Spectral theory of the operator* $(p^2+m^2)^{1/2} - Ze^2/r$, Commun. Math. Phys. **53**, (1977), 285,

[77] E. H. Lieb and R. Seiringer, *The Stability of Matter in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, (2009),

[78] G. Khitrova, H. M. Gibbs, F. Jahnke, M. Kira, S. W. Koch, *Nonlinear optics of normal-mode-coupling semiconductor microcavities*, Rev. Mod. Phys. **71**, (1999), 1591,

[79] C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, Y. Arakawa, *Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum microcavity*, Phys. Rev. Lett. **69**, (1992), 3314,

[80] R. Alicki and K. Lendi, *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*, Springer, Berlin, (1987),

[81] G. J. Milburn, D. F. Walls, *Production of squeezed states in a degenerate parametric amplifier*, Opt. Commun. **39**, (1981), 401,

[82] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, (1997),

[83] P. D. Drummond, Z. Ficek, *Quantum Squeezing*, Springer, New York, (2004),

[84] J. Anwar, M. S. Zubairy, *Effect of squeezing on the degenerate parametric oscillator*, Phys. Rev. A **45**, (1992), 1804,

[85] D. F. Walls, G. J. Milburn, *Quantum Optics*, 2nd edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2008),

[86] R. R. Puri, *Mathematical Methods in Quantum Optics*, Springer, Berlin, (2001),

[87] M. D. Reid, P. D. Drummond, *Quantum Correlations of Phase in Nondegenerate Parametric Oscillation*, Phys. Rev. Lett. **60**, (1988), 2731,

[88] M. D. Reid, *Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using nondegenerate parametric amplification*, Phys. Rev. A **40**, (1989), 913,

[89] P. D. Drummond, M. D. Reid, *Correlations in nondegenerate parametric oscillation. II. Below threshold results*, Phys. Rev. A **41**, (1990), 3930,

[90] Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble, K. C. Peng, *Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables*, Phys. Rev. Lett. **68**, (1992), 3663,

[91] E. I. Mason, C. N. Wong, *Observation of two distinct phase states in a self-phase-locked type II phase-matched optical parametric oscillator*, Opt. Lett. **23**, (1998), 1733,

[92] C. Fabre, E. J. Mason, N. C. Wong, *Theoretical analysis of self-phase locking in a type II phase-matched optical parametric oscillator*, Opt. Commun. **170**, (1999), 299,

[93] H. H. Adamyan, G. Y. Kryuchkyan, *Continuous-variable entanglement of phase-locked light beams*, Phys. Rev. A **69**, (2004), 053814,

[94] J. Laurat, T. Coudreau, G. Keller, N. Treps, C. Fabre, *Effects of mode coupling on the generation of quadrature Einstein-Podolsky-Rosen entanglement in a type-II optical parametric oscillator below threshold*, Phys. Rev. A **71**, (2005), 022313,

[95] M. B. Plenio, S. F. Huelga, *Entangled Light from White Noise*, Phys. Rev. Lett. **88**, (2002), 197901,

[96] M. S. Kim, J. Lee, D. Ahn, and P. L. Knight, *Entanglement induced by a single-mode heat environment*, Phys. Rev. A **65**, (2002), 040101,

[97] S. Schneider and G. J. Milburn, *Entanglement in the steady state of a collective-angular-momentum (Dicke) model*, Phys. Rev. A **65**, (2002), 042107,

[98] M. B. Plenio, S. F. Huelga, A. Beige, and P. L. Knight, *Cavity-loss-induced generation of entangled atoms*, Phys. Rev. A **59**, (1999), 2468,

[99] F. Benatti, R. Floreanini, *Controlling entanglement generation in external quantum fields*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **7**, (2005), S429,

[100] R. Tanaś, Z. Ficek, *Entangling two atoms via spontaneous emission*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **6**, (2004), S90,

[101] L. Jakóbczyk, *Generation of Werner-like stationary states of two qubits in a thermal reservoir*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **43**, (2010), 015502,

[102] K. Kaleta and J. J. Lőrinczi, *Transition in the decay rates of stationary distributions of Lévy motion in an energy landscape*, Phys. Rev. E **93**, (2016), 022135,

[103] J. J. Lőrinczi, *private communication*,

[104] R. Carmona, *Path integral for relativistic Schrödinger operators, in: Schrödinger Operators*, edited by H. Holden and A. Jensen, Lecture Notes in Physics **345**, (Springer, NY, 1989), pp. 65-92,

[105] R. Carmona, W. C. Masters and B. Simon, *Relativistic Schrödinger operators: Asymptotic behavior of eigenfunctions*, J. Funct. Anal. **91**, (1990), 117.

Wykaz publikacji

Publikacje przed uzyskaniem stopnia doktora

	Praca	Impact Factor
B1.	K. Książek, T. Górecki, **M. Żaba**, Cz. Górecki, S. Wacke , *Effect of ball milling on the kinetics of phase transitions and chemical reactions in lead carbonate as observed by differential scanning calorimetry*, Prace Naukowe AJD - seria Chemia i Ochrona Środowiska, 10, (2005) 167.	brak
B2.	R. Olkiewicz, **M. Żaba**, *Dynamics of microcavity polaritons in the Markovian limit*, Phys. Lett. A, **372**, (2008), 3176.	2.174
B3.	R. Olkiewicz, **M. Żaba**, *Dynamics of a degenerate parametric oscillator in a squeezed reservoir*, Phys. Lett. A, **372**, (2008), 4985.	2.174
B4.	R. Olkiewicz, **M. Żaba**, *Dynamics of a self-phase-locked nondegenerate optical parametric oscillator with nonsymmetric feedback loops*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **42**, (2009), 205504.	1.910

Publikacje po uzyskaniu stopnia doktora

	Praca	Impact Factor
C1.	L. Jakóbczyk, R. Olkiewicz, **M. Żaba**, *Asymptotic entanglement of two atoms in a squeezed light field*, Phys. Rev. A **83**, (2011), 062322.	2.878
C2.	**M. Żaba**, P. Garbaczewski, V. Stephanovich, *Levy flights in confining environments: Random paths and their statistics*, Physica A **392**, (2013), 3485-3496.	1.676
C3.	**M. Żaba**, P. Garbaczewski, V. Stephanovich, *Trajectory statistics of confined Levy flights and Boltzmann-type equilibria*, Acta Phys. Pol. B **44** (5), (2013), 1109-1122.	1.011
C4.	**M. Żaba**, P. Garbaczewski, *Thermalization of Levy flights: Path-wise picture in 2D*, International Journal of Statistical Mechanics, vol. 2013, (2013), 738345, (1-12).	brak, wydawany od 2013r.
C5.	**M. Żaba**, P. Garbaczewski, V. Stephanovich, *Path-wise versus kinetic modeling for equilibrating non-Langevin jump-type processes*, Cent. Eur. J. Phys. **12** (3), (2014), 175-184.	1.077
C6.	**M. Żaba**, P. Garbaczewski, *Solving fractional Schrdinger-type spectral problems: Cauchy oscillator and Cauchy well*, J. Math. Phys. **55** (9), (2014), 092103 (1-20).	1.243
C7.	P. Garbaczewski, **M. Żaba**, *Nonlocally-induced (quasirelativistic) bound states: Harmonic confinement and the finite well*, Acta Phys. Pol. B **46** (5), (2015), 949-981.	0.795
C8.	P. Garbaczewski, **M. Żaba**, *Nonlocal random motions and the trapping problem*, Acta Phys. Pol. B **46** (2), (2015), 231-246.	0.795
C9.	**M. Żaba**, P. Garbaczewski, *Nonlocally-induced (fractional) bound states: Shape analysis in the infinite Cauchy well*, J. Math. Phys. **56** (12), (2015), 123502 (1-21).	1.234

C10.	E. V. Kirichenko, P. Garbaczewski, V. Stephanovich, **M. Żaba**, *Ultrarelativistic (Cauchy) spectral problem in the infinite well*, Acta Phys. Pol. B **47** (5), (2016), 1273-1290.	0.795
C11.	E. V. Kirichenko, P. Garbaczewski, V. Stephanovich, **M. Żaba**, *Levy flights in the infinite potential well as the hypersingular Fredholm problem*, Phys. Rev. E **93**, (2016), 052110, (1-10).	2.252
C12.	**M. Żaba**, P. Garbaczewski, *Ultrarelativistic bound states in the spherical well*, J. Math. Phys. **57** (7), (2016), 072302, (1-26).	1.234
C13.	**M. Żaba**, P. Garbaczewski, *Ultrarelativistic bound states in the shallow spherical well*, wstępna wersja pracy, arXiv:1611.01745.	brak

Materiały konferencyjne i upowszechnianie wyników

[D1] **M. Żaba**, *Asymptotyczne splątanie dwóch atomów w polu o ściśniętych fluktuacjach*, seminarium IF UO, 17.11.2011,

[D2] **M. Żaba**, P. Garbaczewski, V. Stephanovich, *Trajectory statistics of confined Levy flights and Boltzmann-type equilibria*, Acta Phys. Pol. B **44** (5), (2013), 1109-1122, Sympozjum Mariana Smoluchowskiego (2012),

[D3] **M. Żaba**, *Statystyka trajektorii losowych w procesach Lévy'ego*, seminarium IF UO, 20.02.2014,

[D4] **M. Żaba**, *Studnia Cauchy'ego*, seminarium IF UO, 16.10.2014,

[D5] **M. Żaba**, *Cauchy Well*, plakat, 51 Winter School of Theoretical Physics, Ladek Zdroj, Poland, 9 - 14 February 2015,

[D6] **M. Żaba**, *Nieskończona studnia Cauchy'ego*, seminarium IF UO, 29.10.2015,

[D7] **M. Żaba**, *Stany związane operatorów nielokalnych - przypadek ultrarelatywistyczny*, seminarium IF UO, 17.11.2016,

[D8] *Fractional (Cauchy) and quasirelativistic spectral problems*, referat wygłoszony na bazie współautoryzowanych przeze mnie prac przez prof. dr hab. P. Garbaczewskiego, seminarium Teorii półgrup Markowa i operatorów Schrdingera, PWr, 30.05.2014; *Cauchy semigroups: Nonlocally-induced bound states* w School of Mathematical Sciences, PKU, Beijing, 1.06.2015; *Levy flights and Levy-Schrdinger semigroups*, w School of Mathematical Sciences, PKU, Beijing, 5.06.2015.

Mariusz Żaba